S.V.A.T. seminář vědy a techniky

I. ročník

2. série

Slovo úvodem

Milý řešiteli,

děkujeme ti, že ses pokusil spočítat jeden nebo více příkladů z druhé série. My jsme tvá řešení prošli, opravili a udělili počet bodů, který odpovídá míře úspěšnosti tvého řešení, a posíláme ti ho nazpátky. Často nalezneš u své úlohy komentář, kterým se ti snažíme přiblížit, kde jsi udělal chybu nebo co bys měl pro příště zlepšit. Hlavně se ale podívej na autorské řešení, které tímto posíláme. Kdyby ti nebylo jasné, kde jsi udělal chybu, nebo nerozumíš některému autorskému řešení, neváhej nám napsat na náš email `svat@fjfi.cvut.cz` nebo využít facebookové stránky `www.facebook.com/seminarvedyatechniky`.

Zadání třetí série bylo zveřejněno již na konci ledna na Dni otevřených dveří, na našich webových stránkách později. Chceme ale upozornit, že jsme znění příkladů i textů kosmeticky upravili, čímž jsme mohli některé nejasnosti vyjasnit (snad ne naopak). Proto doporučujeme, aby ses podíval na stránky na nové zadání, zvlášť pokud ti nebylo něco jasné.

Organizátoři

Řešení úloh 2. série

2.1 Předvolební anketa

Na internetu jste narazili na předvolební anketu ke komunálním volbám. Její výsledek, znázorněný na obrázku, je poměrně překvapivý. Navíc jste si všimli, že dvě strany mají na desetinu procenta stejný počet hlasů. Jedná se o on-line anketu, takže v ním mohlo zatím hlasovat velmi málo lidí, a výsledek tedy nemusí být příliš vypovídající. Bohužel počet hlasujících není na webové stránce uveden.

Úkol *(5 b.)*: *Jaký počet lidí v anketě nejspíš hlasoval?*

Označme celkový počet hlasů jako N a například počet hlasů ODS jako x a počet hlasů sdružení „Sušičtí“ jako y. V grafu tedy vidíme hodnoty $\frac{x}{N} = 24,3\%$ a $\frac{y}{N} = 17,1\%$. Je jasné, že poměr počtů hlasů x/y musí být stejný, jako poměr odpovídajících procentuálních zisků (N se zkrátí). Máme tedy:

$$\frac{x}{y} = \frac{\frac{x}{N}}{\frac{y}{N}} = \frac{24{,}3}{17{,}1} \doteq 1,42.$$

Je jasné, že jak x, tak y musí být celá čísla. Číslo y tedy můžeme najít tak, že budeme hodnotu $1,42$ násobit postupně přirozenými čísly a hledat, kdy dostaneme číslo celé (přibližně), tedy konkrétně číslo x. Postup je v této tabulce:

$$
\begin{aligned}
1 \cdot 1,42 &= 1,42\\
2 \cdot 1,42 &= 2,84\\
3 \cdot 1,42 &= 4,26\\
4 \cdot 1,42 &= 5,68\\
5 \cdot 1,42 &= 7,1\\
6 \cdot 1,42 &= 8,52\\
7 \cdot 1,42 &= 9,94\\
8 \cdot 1,42 &= 11,36\\
9 \cdot 1,42 &= 12,78\\
10 \cdot 1,42 &= 14,2\\
11 \cdot 1,42 &= 15,62\\
12 \cdot 1,42 &= 17,04
\end{aligned}
$$

Zde vidíme, že při násobení číslem 12 dostaneme celé číslo (v rámci chyby způsobené zaokrouhlením). Tím jsme určili, že $x = 17$ a $y = 12$. Nyní již stačí spočítat, že na každý hlas v grafu připadá $\frac{24,3}{17} = 1,43$ procenta a dopočítat počty hlasů u zbylých stran. Tak ověříme, že výsledek skutečně má smysl. Při počítání bychom se totiž už mohli zastavit například u $x = 7$ a $y = 10$, při dopočítání hlasů pro ostatní strany však dostaneme necelá čísla. Nakonec tedy dospějeme k celkovému počtu hlasujících $N = 70$.

Samozřejmě by mohla být situace taková, že všechny strany by měly dvojnásobek, trojnásobek, desetinásobek nebo třeba stonásobek počtu hlasů, který jsme určili (navíc kvůli zaokrouhlení výsledků ne nutně přesný násobek). Když budeme předpokládat, že v anketě hlasovalo hodně lidí, pak je velmi malá pravděpodobnost, že všechna čísla udávající počty hlasujících pro jednotlivé strany mají nějaký společný dělitel různý od jedničky, aby se nám mohlo zdát, že jich hlasovalo méně. Svádí nás to udělat hned opačný závěr – když výsledky připouštějí, že hlasovalo málo lidí, je velmi nepravděpodobné, že jich hlasoval nějaký násobek. Pravděpodobnost, že výsledky vypadají, jako by hlasovalo málo lidí, za předpokladu, že jich ve skutečnosti hlasovalo hodně, a pravděpodobnost, že hlasovalo hodně lidí za předpokladu, že to vypadá, jako by jich hlasovalo málo, jsou tzv. *podmíněné pravděpodobnosti* a obecně se nerovnají. Kdybychom je za stejné považovali, dopustili bychom se tzv. *prokurátorova klamu*[1]. Jejich vztah totiž závisí na pravděpodobnosti samotného jevu, že hlasovalo málo lidí. Zde ovšem malý počet hlasujících vůbec není vyloučen, můžeme tak opravdu udělat závěr, že nejspíš skutečně hlasovalo jen těch 70 lidí.

[1] `http://en.wikipedia.org/wiki/Prosecutor%27s_fallacy`

Mája

2.2 Voda z kohoutku

Úkol *(5 b)*: *Jaký tvar má proud vody vytékající z kouhoutku? Udělejte takové zjednodušující předpoklady, aby se vám podařilo úlohu vyřešit, ale aby výsledek přibližně odpovídal realitě. Pokud se vám to nepodaří, můžete zkusit tvar zjistit experimentálně. Zdůvodněte, proč vypadá skutečnost přece jen trochu jinak než vaše řešení.*

Aby byla úloha rozumně řešitelná, budeme předpokládat, že voda vytéká z výtokové hubice tvaru válcové trubky o ploše průřezu S_0 počáteční rychlostí v_0. Situace je symetrická vůči rotaci kolem osy trubky, proto můžeme předpokládat, že proud vody bude mít v každém průřezu tvar kruhu se středem na této ose. (I kdyby byl průřez otvoru jiný, povrchové napětí by kousek pod místem výtoku minimalizovalo obvod průřezu a utvořilo tak kruh.) Abychom plně popsali útvar, který voda vytvoří, stačí nám už jen stanovit, jak závisí poloměr r kruhu na výšce od místa výtoku – tu označme h. Hledáme tedy funkci $r(h)$.

Jaké síly na vodu působí? Odpor vzduchu můžeme při hrubém výpočtu zanedbat, většina molekul vody leží „uvnitř“ proudu, a není tedy v kontaktu se vzduchem. Nejdůležitější silou je samozřejmě síla tíhová, která působí kolmo dolů. Druhou silou, která určuje chování vody, je povrchové napětí – to způsobuje, že kapalina „drží pohromadě“ a má stále stejnou hustotu. Tato síla působí v našem případě v podstatě jen vodorovně, takže vodu nezrychluje ani nezpomaluje. V důsledku toho můžeme rychlost v vody v dané výšce určit podle vzorců pro volný pád.

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgh + \frac{1}{2}mv_0^2$$

$$v = \sqrt{2gh + v_0^2}$$

Jak jsme očekávali, vidíme, že voda zrychluje. Aby byl tok ustálený, musí ale za jednotku času projít průřezem v každé výšce stejný objem vody. To popisuje rovnice kontinuity $S(h_1)v(h_1) = S(h_2)v(h_2)$. Zde S označuje plochu průřezu, a tu lze snadno spočítat jako $S(h) = \pi r^2(h)$. Do tohoto vzorce dosadíme hodnoty těsně u výtoku ($h_2 = 0$).

$$\pi r^2(h)\sqrt{2gh + v_0^2} = S_0 v_0$$

$$r(h) = \sqrt{\frac{S_0 v_0}{\pi}}\frac{1}{\sqrt[4]{2gh + v_0^2}}$$

Zbývá už jen určit konstanty. Kdybychom měli kohoutek před sebou, plochu S_0 změříme snadno. Nejjednodušší způsob měření rychlosti v_0, který nás napadl, bylo změřit průtok vody (tj. objem, který vyteče za daný čas). Ten už odpovídá součinu $S_0 v_0$ v odmocnině nalevo a lze z něj snadno vyjádřit rychlost v_0.

Vidíme, že závislost $r(h)$ je dána hyperbolou čtvrtého stupně. I takovéhle křivky tedy lze v přírodě najít. Za zmínku ještě stojí, že zvyšování a snižování rychlosti v_0 způsobuje pouze rozšiřování proudu a posouvání hyperboly nahoru či dolů (v grafu doleva či doprava). Kdybychom křivku prodloužili nad ústí kohoutku, pak by místo, kde by se proud asymptoticky rozšiřoval do nekonečna, odpovídalo výšce vodního sloupce, jež udává tlak vody vytékající z potrubí.

Ve skutečnosti vypadá vytékající voda přece jen trochu jinak. Po povrchu námi vypočítaného tvaru tečou malé pramínky, které jsou důsledky turbulencí vyvolaných odporem vzduchu. Navíc od určitého místa přestávají naše výpočty platit úplně, protože se proud vody ztenčí natolik, že se roztrhá na jednotlivé kapky.

Kuba

2.3 Pohyb částice v elektromagnetickém poli

Úkol a *(1 b.)*: *Správným nastavením intenzity homogenního elektrického pole $\vec{E}$ a magnetické indukce $\vec{B}$ se dá sestavit zařízení, které propustí nabité částice pouze určité rychlosti. Soustava vypadá tak, že směr rychlosti částice, intenzity elektrického pole a magnetické indukce jsou navzájem kolmé. Odvoďte velikost intenzity elektrického pole $\vec{E}$ pro indukci $\vec{B}$ tak, aby soustava propouštěla pouze částice (s hmotností m_0 a nábojem q) o rychlosti $\vec{v}$ (propouštěním se v tomto případě míní, že částice se bude pohybovat přímočaře, zatímco částice jiné rychlosti změní směr).*

Úkol b *(2 b.)*: *Soustava z předchozí úlohy se dá využít například při hmotnostní spektrografii. Nejdříve se vyseparují částice určité rychlosti a poté se měří poloměr dráhy částic v samostatném magnetickém poli. Tento proces umožňuje zjistit poměr hmotnosti a náboje částice. Vypočítejte tedy závislost poměru hmotnosti a náboje m/q na velikosti rychlosti v, poloměru dráhy r a indukci magnetického pole $\vec{B}$.*

Ve studijním textu jsme se vám snažili přinést obecný popis toho, jak působí Lorentzova síla, elegantním způsobem pomocí vektorového počtu. Ve většině úkolů jste se však nemuseli příliš párat s vektorovým součinem, neboť magnetická síla často byla kolmá na směr pohybu částic.

Tak tomu bylo i v prvních dvou úkolech. Uvažujme, že částice se pohybuje směrem dopředu, elektrické pole je orientováno zprava doleva a magnetické zdola nahoru. Pak na kladně nabitou částici působí elektrická síla o velikosti $F_\mathrm{e} = qE$ směrem zprava doleva a použitím pravidla pravé ruky zjistíme, že magnetická síla o velikosti $F_\mathrm{m} = qvB$ působí naopak zleva doprava. V takovém poli se tedy budou přímočaře pohybovat pouze částice s takovou rychlostí, že se účinky obou sil vzájemně vyruší. Tuto rychlost lze vyjádřit jako

$$v = \frac{E}{B}.$$

Na nabitou částici v magnetickém poli, které je kolmé na její směr pohybu, působí síla, která je taktéž kolmá na směr pohybu (i na směr magnetické indukce). Protože je kolmá na směr pohybu, nemění rychlost dané částice, a tím pádem se také nemění velikost této síly. Lorentzova síla tak bude pouze zakřivovat dráhu částice, a bude tak představovat dostředivou sílu při kruhovém pohybu. Z mechaniky víme, že dostředivá síla se vypočítá jako $F_\mathrm{d} = mr\omega^2 = mv^2/r$. Jak už jsme zmínili, roli dostředivé síly hraje Lorentzova síla ve tvaru $F = qvB$. Z rovnosti těchto sil vyjádříme žádaný poměr mezi hmotností a nábojem

$$\frac{m}{q} = \frac{Br}{v}.$$

Úkol c *(3 b.)*: *Určete, jak se v cyklotronu změní energie částice po každém průchodu elektrickým potenciálem U, a vypočtěte poloměr dráhy a rychlost částice v závislosti na její energii. Také zjistěte, jaká bude půlperioda pohybu částice v závislosti na energii a rychlosti (a tedy i jak často se musí přepínat elektrické pole). Počáteční rychlost částice byla v_0.*

Úkol d *(2 b.)*: *V předchozí úloze měla částice počáteční rychlost kolmou na magnetickou indukci a v důsledku toho se pohybovala po kružnici. Jak se bude částice pohybovat, když bude mít jiný směr počáteční rychlosti?*

Rozdíl potenciálů mezi danými dvěma body nám udává, jakou energii na částici s jednotkovým nábojeme spotřebujeme, popřípadě jaká energie se uvolní, přesuneme-li částici mezi těmito body. Částici s nábojem q tedy každým průchodem vzroste energie o Uq. Po n průchodech potenciálem pak bude mít částice energii $E_n = E_0 + nqU$, kde E_0 je počáteční energie. Z kinetické energie se již rychlost vypočítá snadno jako

$$v = \sqrt{\frac{2E_n}{m}}.$$

Poloměr dráhy můžeme vypočítat využitím vztahu z předchozího úkolu. Po dosazení za v vyjde

$$r = \frac{\sqrt{2mE_n}}{Bq}.$$

Perioda kruhového pohybu se vypočítá jako délka dané kružnice dělená rychlostí, tj. $T = 2\pi r/v$. Do vztahu můžeme opět dosadit z předchozí úlohy a získat tak výsledek

$$T/2 = \frac{\pi m}{qB}.$$

Vidíme tedy, že perioda či půlperioda kruhového pohybu v cyklotronu vůbec nezávisí na energii či rychlosti částice. To je z praktického hlediska velice výhodné. Výpočet však ve skutečnosti pro velké rychlosti není přesný – předpokládá totiž konstantní hmotnost částice a neuvažuje tak relativistické jevy.

Magnetické pole vždy působí pouze v rovině kolmé na směr magnetické indukce. V této rovině tedy bude opět docházet ke kruhovému pohybu, přičemž magnetická dostředivá síla bude záviset pouze na průmětu rychlosti do této roviny. Složka rychlosti rovnoběžná s magnetickým polem působící sílu neovlivní, ani sama nebude ovlivněna. Výslednou křivkou nakonec bude šroubovice. Je-li směr částice rovnoběžný s magnetickou indukcí, je průmět do kolmé roviny nulový a trajektorie čásice vůbec nebude magnetickým polem ovlivněna. Částice se tak bude pohybovat po přímce.

Úkol e *(1 b.)*: *V případě moderních detektorů částic nevidíme celé trajektorie, ale pouze body (když částice zasáhne detektor). Každý takovýto bod má tři prostorové a jednu časovou souřadnici. Promyslete, kolik takových bodů je potřeba k jednoznačné rekonstrukci dráhy, když se částice pohybuje v magnetickém poli. Magnetickou indukci $\vec{B}$ směřuje ve směru osy z.*

Úkol f *(3 b.)*: *Vymyslete, jak z těchto „zásahů“ určíte hmotnost a kinetickou energii částice, případně uveďte, v jakých případech (podle počáteční rychlosti, viz úkol d) nelze tyto vlastnosti určit. Uvažujte, že znáte náboj částice q.*

Pokud se částice pohybuje po přímce, stačí nám dva body abychom určili její směr. V případě kružnice jsou potřeba tři body (viz další úloha). V případě spirály využijeme toho, že víme, kterým směrem bude spirála orientovaná – ve směru magnetické indukce. Stačí nám tak opět tři body. Promítneme-li je do kolmé roviny, budeme schopni určit poloměr kružnice, která slouží jako základ této spirály. Známe-li poloměr, stačí nám dva body na určení stoupání spirály.

Nyní pro jednoduchost uvažujme, že magnetické pole je orientováno ve směru osy z.

Pohybuje-li se částice po přímce (tedy ve směru z), postačí dva body a navíc jen jedna prostorová souřadnice: $(z_0, t_0), (z_1, t_1)$. Podělíme-li rozdíl vzdáleností časovým rozdílem, dostaneme rychlost $v = (z_1 - z_0)/(t_1 - t_0)$. Jelikož je ale rychlost jediný údaj, který jsme schopni zjistit, nemáme jak odvodit hmotnost, a tedy ani energii.

Je-li naopak rychlost ve směru osy z nulová, znamená to, že se částice pohybuje po kružnici v rovině xy. Poloměr kružnice určené třemi body A, B, C, tedy poloměr kružnice opsané trojúhelníku ABC, se vypočítá jako

$$r = \frac{abc}{4S_{ABC}} = \frac{a}{2\sin\alpha} = \frac{b}{2\sin\beta} = \frac{c}{2\sin\gamma},$$

kde a, b, c jsou délky jednotlivých stran, α, β, γ příslušné úhly a S_{ABC} obsah trojúhelníka.

Ze souřadnic bodů A, B a C již snadno určíme délky stran trojúhelníka a kupříkladu úhel γ. Středový úhel, který částice opíše při pohybu mezi body A a B, bude pak $\varphi = 2\gamma$. Rychlost pak už zjistíme jednoduše:

$$v = \omega r = \frac{\varphi r}{t} = \frac{\gamma c}{(t_B - t_A)\sin\gamma}.$$

Máme tedy poloměr a rychlost a z toho už umíme odvodit hmotnost a energii (opět využijeme výsledků úlohy b)

$$m = \frac{RqB}{v}, \quad E = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}qBRv.$$

Se znalostí předchozích výsledků už je zjištění výsledku pro šroubovici jednoduché. Rozdělíme pohyb částice na pohyb po přímce a po kružnici. Rychlost ve směru osy z (tedy ve směru rovnoběžném s magnetickou indukcí) $v_{\parallel}$ určíme snadno jako v prvním případě pohybu po přímce. Budeme uvažovat pouze změny v z-ové souřadnici a první dvě souřadnice budeme ignorovat. Pohyb po kružnici naopak vyšetříme, berouce v úvahu pouze první dvě souřadnice, výše uvedeným postupem. Takto zjistíme hmotnost m a kolmou složku rychlosti $v_{\perp}$. Celková rychlost pak je $v = \sqrt{v_{\perp}^2 + v_{\parallel}^2}$ a energie již jednoduše $E = 1/2\, mv^2$.

Filip

2.4 Kostky a pravděpodobnost

Ve všech úkolech, které jsme si pro vás vymysleli, figuruje házení několika kostkami. Podívejme se nejprve, jak může vypadat množina Ω všech možných výsledků náhodného pokusu (ve studijním textu jsme nezmínili, že jejím prvkům se také říká *elementární jevy*).

Už v textu jsme zmínili, že při hodu jednou kostkou bude množina elementárních jevů šestiprvková $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, kde dané číslo značí, co padlo na kostce. Množina je jistě konečná, při hodu kostkou se realizuje vždy právě jedna možnost (neuvažujeme-li, že může zůstat balancovat na hraně), a je-li kostka férová, je splněn i poslední důležitý předpoklad, že jsou všechny elementární jevy stejně pravděpodobné – každý znich má tedy pravděpodobnost $1/6$.

Házíme-li dvěma kostkami, člověka přirozeně napadne, že množina Ω bude tvořena všemi uspořádanými dvojicemi čísel od jedné do šesti, kde první číslo bude značit hodnotu, která padne na první kostce, zatímco to druhé bude značit hodnotu, která padne na druhé kostce:

$$\Omega = \{(1,1),\dots,(1,6),(2,1),\dots,(2,6),\dots,(6,1),\dots,(6,6)\}.$$

Množina Ω je skutečně konečná – je $|\Omega| = 36$, opět by se při každém hodu měl realizovat právě jeden elementární jev a navíc není důvod se domnívat, že by elementární jevy nebyly stejně pravděpodobné. Zdůvodnění posledního tvrzení ještě trochu rozvedeme. Hodnota, která padne na první kostce, totiž nijak neovlivňuje, co padne na druhé kostce, náhodný jev $A_j = \{(j,1),(j,2),\dots,(j,6)\}$ „na první kostce padlo číslo j“ je tedy nezávislý na libovolném náhodném jevu $B_k = \{(1,k),\dots,(6,k)\}$ „na druhé kostce padlo číslo k“. Pravděpodobnost těchto jevů by se měla shodovat s předchozím případem a měla by se tedy rovnat $1/6$ (pravděpodobnost, že na kostce padne jednička je $1/6$ nehledě na to, hodíme-li pak ještě druhou kostkou). Z nezávislosti tedy mají všechny elementární jevy (j,k) pravděpodobnost $P(j,k) = P(A_j \cap B_k) = P(A_j)P(B_k) = 1/36$ – jsou tedy skutečně všechny stejně pravděpodobné.

Podobně můžeme postupovat i při házení větším počtem kostek.

Úkol a *(2 b.)*: *Hrajeme se třemi kostkami. Jaká je pravděpodobnost, že se stejné číslo objeví alespoň na dvou ze tří kostek? Jaká je pravděpodobnost, že se stejné číslo objeví přesně na dvou ze tří kostek?*

Máme celkem tři kostky a každá z nich má šest možných výsledků. Proto $|\Omega| = 6^3$. V následující tabulce je množina Ω vypsaná, červenou barvou je vyznačen jev A (tedy jev, kdy padnou alespoň dvě stejná čísla):

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{ccccc}
\color{red}{(1,1,1),} & \color{red}{(1,2,1),} & \color{red}{(1,3,1),} & \cdots & \color{red}{(1,6,1),} \\
\color{red}{(1,1,2),} & \color{red}{(1,2,2),} & (1,3,2), & \cdots & (1,6,2), \\
\color{red}{(1,1,3),} & (1,2,3), & \color{red}{(1,3,3),} & \dots & (1,6,3), \\
\color{red}{\vdots} & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\color{red}{(1,1,6),} & (1,2,6), & (1,3,6), & \cdots & \color{red}{(1,6,6),} \\
 & & & & \\
\color{red}{(2,1,1),} & \color{red}{(2,2,1),} & (2,3,1), & \cdots & (2,6,1), \\
\color{red}{(2,1,2),} & \color{red}{(2,2,2),} & \color{red}{(2,3,2),} & \cdots & \color{red}{(2,6,2),} \\
(2,1,3), & \color{red}{(2,2,3),} & \color{red}{(2,3,3),} & \cdots & (2,6,3), \\
\vdots & \color{red}{\vdots} & \vdots & \ddots & \vdots \\
(2,1,6), & \color{red}{(2,2,6),} & (2,3,6), & \cdots & \color{red}{(2,6,6),} \\
 & & & & \\
 & & \vdots & &
\end{array} \right\}.$$

Jev B se od jevu A liší situacemi, kdy padnou všechna tři čísla stejná, tedy

$$B = A \setminus \{(1,1,1),(2,2,2),\dots,(6,6,6)\}.$$

Pro $|A|$ platí
$$|A| = (6 + 2 \cdot 5) \cdot 6 = 96.$$

Je-li například první ze tří čísel 1, pak z horní části tabulky pro Ω (tedy trojice začínající jedničkou) dostáváme v prvním sloupci šest možností, v dalších pěti sloupcích po dvou možnostech, viz červeně vyznačené situace. Takto pro všech šest případů, kdy je první z čísel jiné než 1. Dále $|B| = |A| - 6$, tedy

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{96}{6^3} = \frac{4}{9} \doteq 0{,}44 \quad \text{a}$$

$$P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{96-6}{6^3} = \frac{5}{12} \doteq 0{,}42.$$

Úkol b *(4 b.)*: *Hrajeme se dvěma kostkami. Označme jevy:*

- A = *na první kostce padne 4,*
- B_1 = *po druhém hodu bude součet roven 6,*
- B_2 = *po druhém hodu bude součet roven 7.*

Jsou jevy A a B_1 nezávislé? Jsou nezávislé jevy A a B_2? Výsledky porovnej a slovy vysvětli.

Nejprve vyšetříme nezávislost jevů A a B_1. Hrajeme se dvěma kostkami a každou z nich hodíme pouze jednou. Dohromady se tedy jedná o dva hody, množina možných výsledků tedy je

$$\Omega = \{(1,1), \ldots, (1,6), (2,1), \ldots, (2,6), \ldots, (6,1), \ldots, (6,6)\},$$

takže $|\Omega| = 6^2 = 36$.

Pro jev A máme

$$A = \{(4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6)\}, \quad |A| = 6, \quad P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

Pro B_1 platí

$$B_1 = \{(1,5), (2,4), (3,3), (4,2), (5,1)\}, \quad |B_1| = 5, \quad P(B_1) = \frac{5}{36}.$$

Aby byly jevy A a B_1 nezávislé, muselo by podle definice platit $P(A \cap B_1) = P(A)P(B_1)$, tedy pravděpodobnost realizace jevů A a B_1 současně by se musela rovnat součinu pravděpodobností samotných jevů. Zde však

$$P(A)P(B_1) = \frac{5}{216}, \quad \text{ovšem} \quad P(A \cap B_1) = P(\{(4,2)\}) = \frac{1}{36},$$

jevy tedy nejsou nezávislé. Jev B_1 totiž vylučuje, aby na kterékoliv kostce padlo 6. Pokud tedy po prvním hodu padne cokoliv mezi 1 a 5, zvyšuje to pravděpodobnost jevu B_1. Realizace jevu A tedy zvyšuje pravděpodobnost realizace jevu B_1.

Naproti tomu pro jev B_2 platí

$$B_2 = \{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}, \quad |B| = 6, \quad P(B_2) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

Tedy

$$P(A)P(B_2) = \frac{1}{36} \quad \text{a} \quad P(A \cap B_2) = P(\{(4,3)\}) = \frac{1}{36}.$$

Jevy A a B_2 jsou tedy nezávislé. Pravděpodobnost jevu B_1 totiž vůbec neovlivní výsledek hodu první kostkou, tedy ani realizace jevu A.

Úkol c *(6 b.)*: *Hraješ Macháčka. V průběhu předchozích kol jsi zjistil, že hráč, který je po tobě, ti věřil pětkrát z deseti případů, a hráč, který je před tebou, ti šestkrát z deseti řekl pravdu. Dále předpokládej, že sám jsi velmi důvěřivý (tedy vždy uvěříš s pravděpodobností 1). Považuj všechny jevy za nezávislé. Využij těchto znalostí a předpokladů k výpočtu potřebných pravděpodobností. Zjisti:*

- *Pravděpodobnost, že přehodíš číslo 62.*
- *Pravděpodobnost, že ztratíš bod (budeš se muset napít), když musíš přehodit číslo 62. (Samozřejmě předpokládej, že když přehodíš 62, jistě říkáš pravdu. Když ne, lžeš.)*
- *Pravděpodobnost, že budeš muset přehodit číslo 62. (Opět předpokládej, že pokud hráč před tebou hodí 62, tak jistě mluví pravdu. Pokud ne, lže.)*
- *Je tento model, kdy předpokládáme nezávislost, reálný?*

Mohlo by nás napadnout, že si zjednodušíme práci a jako množinu jevů Ω nyní vezmeme namísto všech uspořádaných dvojic (jako jsme to doteď dělali při hodu dvěma kostkami) množinu výsledků, tj. neuspořádaných dvojic (u Macháčka totiž ve výsledku na pořadí kostek nezáleží – hody $(6,3)$ a $(3,6)$ nám oba dají výsledek 63. To by ale byla chyba – nesplnili bychom jeden z důležitých předpokladů, který jsme ve studijním textu uváděli, a to že všechny elementární jevy (prvky Ω) mají být stejně pravděpodobné.

Za množinu elementárních jevů Ω je vždy dobré volit opravdu co nejelementárnější jevy, kde nemáme pochyb o splnění uvedených předpokladů. Takovou je právě množina uspořádaných dvojic, u které jsme tyto předpoklady již na začátku textu zdůvodnili. Nyní zdůvodněme, proč tyto vlastnosti nesplňuje množina neuspořádaných dvojic. Zatímco u jevů „na první kostce mi padla dvojka a na druhé taky dvojka“, „na první kostce mi padla dvojka a na druhé trojka“ a „na první kostce mi padla trojka a na druhé dvojka" není pochyb, že jsou stejně pravděpodobné – tvoří dokonce elementární jevy z naší množiny Ω –, u jevů „dva indiáni", tj. „na obou kostkách mi padla dvojka", a „třicet dva", tj. „na jedné z kostek padla trojka a na druhé dvojka", to tak není. Jev „dva indiáni" je opět tvořen jediným elementárním jevem $(2,2)$, jež má tím pádem pravděpodobnost $1/36$, není stejně pravděpodobný jako jev „třicet dva", který je tvořen dvěma elementárními jevy $(3,2)$ a $(2,3)$, a má tedy pravděpodobnost $2/36 = 1/18$.

Nyní k samotným podúkolům. Označme A jev přehození čísla 62, pak

$$\begin{aligned}A = \{&(6,3),(3,6),(6,4),(4,6),(6,5),(5,6),\\&(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6),(1,2),(2,1)\},\end{aligned}$$

tedy $P(A) = |A|/|\Omega| = 14/36 = 7/18$.

Další dvě otázky jsou sice hezké cvičení na pravděpodobnost, ale reálný model netvoří. Hra, ve které by naše rozhodování nezáviselo na aktuálních okolnostech, by byla poměrně nudná. I u Macháčka tedy hráči lžou či mluví pravdu, popřípadě věří či nevěří v závislosti na tom, co jim padlo za číslo nebo jaké číslo jim sdělil hráč před nimi. Odpověď na poslední otázku je tedy záporná.

Abych neztratil bod, když hráč přede mnou hodil 62, musel bych přehodit 62 nebo zalhat a další hráč by mi musel uvěřit. Pokud nepřehodím 62 a následující hráč mi neuvěří, prohrávám. Nepřehození 62 je doplňkový jev k přehození, je tedy $P(\text{nepřehodím}) = 1 - P(A) = 11/18$. Dále hráč po mně mi věřil pětkrát z deseti, tedy $P(\text{neuvěří}) = 1 - P(\text{uvěří}) = 1 - 5/10 = 1/2$. Nakonec z nezávislosti[2]

$$P(\text{prohra}) = P(\text{nepřehodím})P(\text{neuvěří}) = 11/18 \cdot 1/2 = 11/36.$$

Protože hráči před sebou vždycky věříš, musíš přehodit 62, kdykoliv hodí alespoň 62 (ať už lže nebo nikoliv, neboť hráč, který lže a není hloupý, vždy říká více než hodil, nikdy méně) nebo hodí méně než 62, ale lže a říká alespoň 62. Pravděpodobnost, že hráč přede mnou přehodí 62, jsme již spočítali, snadno dopočítáme pravděpodobnost doplňkového jevu, že 62 nepřehodí. Pravděpodobnost, že lže, je 40 %, neboť ti šestkrát z deseti řekl pravdu. Pravděpodobnost, že lže a zároveň říká alespoň 62, by se nepočítala snadno, dovolme si tedy přiblížení, které udělalo i mnoho z vás, a to že se tyto pravděpodobnosti budou shodovat[3]. Výsledkem tedy bude

$$P(\text{musím přehodit 62}) = P(A) + (1 - P(A))P(\text{lže}) = 7/18 + 11/18 \cdot 4/10 = 19/30.$$

Ondra S.

[2] Zde si všimněme, že tu s pojmy jako *jev* zacházíme spíše intuitivním způsobem, nikoliv na základě našich definic. Jevy „prohra" nebo „neuvěří" už nejsou žádné množinu elementárních jevů. Bylo by potřeba sestrojit novou množinu Ω. Náš přístup by se za předpokladu nezávislosti věření a hodů kostkou dal formalizovat podobně, jako jsme to udělali na počátku pro hody dvojcí kostek – sestrojila by se množina uspořádaných dvojic, kde první člen dvojce by byl výsledek hodu kostkou a druhý člen by bylo „věří" či „nevěří". To by však fungovalo jen díky tomu, že jevy „věří" a „nevěří" jsou stejně pravděpodobné, což vůbec není samozřejmost. Na popis složitějších jevů je teda potřeba zavádět složitější teorie pravděpodobnosti, než jsme vám představili.

[3] Tento předpoklad není až tak zcestný. Zvláště musí-li tento hráč přehodit číslo kolem padesátky či šedesátky. Dává možná větší smysl než zmíněný předpoklad nezávislosti.

Výsledková listina 2. série

	Jméno	r.	v.	b_1	b_2	b_3	b_4	b_T	$\sum f(b_i)$
1	Šimon Jelínek	3	2	5	5,0	10,5	9,0	$6{,}0^{(10{,}5)}$	36,97
2	Ondřej Poláček	3	2	4	3,5	8,3	10,0	$6{,}0^{(7{,}0)}$	34,21
3	Martin Scheubrein	3	2	5	5,0	7,3	9,5	–	28,69
4	Jiří Růžička	3	2	5	0,5	3,3	10,5	–	21,19
5	Vojtěch Laitl	0	2	1	1,0	1,5	7,0	2,0	20,58
6	Jakub Salavec	3	2	5	–	5,0	7,0	–	19,36
7	Jiří Jičínský	2	2	2	–	–	10,5	3,1	18,21
8	Jan Petr	2	2	5	–	–	5,0	1,0	13,77
9	Dominika Jochcova	4	1	–	1,5	7,0	2,0	–	11,96
10	Dominik Krasula	2	1	–	–	–	6,0	–	8,21

r. – ročník řešitele (ekvivalent střední školy či čtyřletého gymnázia, 0 znamená jakýkoliv nižší ročník), v. – počet řešených sérií, b_i – body za jednotlivé úlohy (pomlčka znamená neřešil), $\sum f(b_i)$ – součet bodů za jednotlivé úlohy zvýhodňující mladší a méně zkušené řešitele

Celková výsledková listina

	Jméno	1. série	2. série	celkem
1	Ondřej Poláček	38,98	34,21	73,19
2	Šimon Jelínek	28,99	35,50	64,49
3	Martin Scheubrein	29,93	28,69	58,62
4	Jiří Růžička	24,59	21,19	45,78
5	Vojtěch Laitl	21,61	20,58	42,19
6	Jiří Jičínský	18,61	18,21	36,82
7	Petr Doležal	29,54	0,00	29,54
8	Jakub Salavec	5,00	19,36	24,36
9	Jan Petr	6,13	13,77	19,91
10	Marie Zlínská	17,73	0,00	17,73
11	Dominika Jochcová	5,90	11,45	17,35
12	Kateřina Smítalová	13,00	0,00	13,00
13	Dominik Krasula	0,00	8,21	8,21
14	Ondřej Daneš	5,64	0,00	5,64
15	Ondřej Brunner	2,95	0,00	2,95