



Řešení úloh 3. série

3.1 n -rozměrné bytosti

Představme si vesmír o n prostorových dimenzích, ve kterém žije nepříliš vyspělá civilizace používající k zápisu papír ve tvaru hyperkvádrů o dimenzi $n - 1$.

Úkol a (3 b.): Pomozte jim najít takový poměr délek hran papíru, aby platilo, že když jej přeloží napůl, získají hyperkvádr se stejným poměrem hran. Definujeme papír formátu A0 v n dimenzích jako hyperkvádr o objemu 1 ζ^{n-1} (ζ je jednotka délky) s těmito poměry hran. Formát A1 získáme půlením nejdelší hrany papíru A0, A2 rozpůlením A1 atd. Najděte obecný vztah pro délky hran papíru formátu AN.

Úkol b (2 b.): Definujme papír formátu BN jako útvar, jehož délky hran jsou geometrickými průměry délek odpovídajících hran A($N - 1$) a AN. Existují při dané dimenzi n nějaká přirozená čísla M a P tak, že jedna z hran papíru BM je stejně dlouhá jako nějaká hrana papíru AP?

První úkol budeme řešit úplně stejně jako úlohu 1.1 z první série. Některým mohla dělat problém představa překládání $n - 1$ -rozměrného hyperkvádrů. Stačí si však uvědomit, že je to totéž, jako bychom ho rozpůlili, tj. délku nejdelší hrany vydělili dvěma. Označme si a_1, a_2, \dots, a_{n-1} hrany $n - 1$ -rozměrného hyperkvádrů. Po přeložení napůl získáme kvádr o rozměrech $a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_1/2$. Poměry hran se musejí při překládání zachovávat, musí tedy platit

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{a_2}{a_3}, \quad \frac{a_2}{a_3} = \frac{a_3}{a_4}, \quad \dots, \quad \frac{a_{n-3}}{a_{n-2}} = \frac{a_{n-2}}{a_{n-1}}, \quad \frac{a_{n-2}}{a_{n-1}} = \frac{a_{n-1}}{a_1/2}, \quad \frac{a_{n-1}}{a_1} = \frac{a_1/2}{a_2},$$

z čehož je možné vyjádřit

$$a_1 = \frac{a_2^2}{a_3} = \frac{a_3^3}{a_4^2} = \dots = \frac{a_{n-2}^{n-2}}{a_{n-1}^{n-3}} = \frac{a_{n-1}^{n-1}}{a_1^{n-2}/2^{n-2}} \Rightarrow \frac{a_{n-1}}{a_1} = 2^{-\frac{n-2}{n-1}},$$

tedy

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{a_2}{a_3} = \dots = \frac{a_{n-2}}{a_{n-1}} = \frac{a_{n-1}}{a_1/2} = 2^{-\frac{1}{n-1}}.$$

Poměr délek hran papíru v prostoru o n dimenzích je tedy $a_1 : a_2 : \dots : a_{n-1} = 1 : 2^{-\frac{1}{n-1}} : \dots : 2^{-\frac{n-2}{n-1}}$.

Označme nyní $a_{m,1}, \dots, a_{m,n-1}$ délky hran papíru formátu Am . Všechny hrany můžeme vyjádřit například pomocí té první vztahem

$$a_{m,k} = 2^{-\frac{k-1}{n-1}} a_{m,1},$$

objem papíru Am tak bude

$$a_{m,1} \cdots a_{m,k} = a_{m,1} \cdot 2^{\frac{1}{1-n}} a_{m,1} \cdots 2^{\frac{n-2}{1-n}} a_{m,1} = 2^{\frac{0+1+2+\dots+n-2}{1-n}} a_{m,1} = 2^{-\frac{n-2}{2}} a_{m,1}^{n-1},$$

kde jsme využili vzorec pro součet aritmetické posloupnosti, který v tomto případě nabývá tvaru

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Protože objem papíru A0 má být jednotkový a každý další papír se získá rozpůlením předchozího, musí být objem papíru Am roven $1/2^m \zeta$, z toho získáme

$$a_{m,1} = 2^{\frac{n/2-1-m}{n-1}}, \quad a_{m,k} = 2^{\frac{n/2-k-m}{n-1}}.$$

Nyní se podívejme na řadu papírů B. Označme opět $b_{m,1}, \dots, b_{m,n-1}$ délky hran papíru formátu Bm . Tyto délky definujeme pomocí geometrického průměru, tedy

$$b_{m,k} = \sqrt{a_{m,k} a_{m-1,k}} = 2^{\frac{n-2k-2m+1}{2(n-1)}} = 2^{\frac{n/2+k-m+1/2}{n-1}}.$$

Aby se délka nějaké hrany nějakého papíru z řady A rovnala délce nějaké hrany nějakého papíru z řady B, musela by existovat přirozená čísla m, k, p, r taková, že

$$a_{m,k} = b_{p,r}, \quad \text{tedy} \quad k - m = p - r + 1/2.$$

Taková rovnost však pro přirozená čísla nikdy nenastane.

3.2 Sněhulák

Úkol (5 b.): Sněhulák složený ze dvou koulí o poloměrech R a $\frac{2}{3}R$ je násilně mučen zavěšením „hlavou dolů“ a následným houpáním. Spočítejte periodu kmitů takto zavěšeného sněhuláka ve chvíli, kdy se sněhulák už jenom dohupuje a výchylka je tedy malá. Hustota sněhu použitého na stavbu sněhuláka je ρ .

Nejprve si zrekapitulujme, co známe: hustota sněhu je ρ , poloměr velké koule R a poloměr malé koule $r = \frac{2}{3}R$. Z toho chceme spočítat periodu kmitů T . Jedná se o čas, za který se kyvadlo (v našem případě sněhulák) zhoupne zpět do výchozí polohy. Lze ji spočítat pomocí vztahu

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l_{\text{red}}}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{I_{\text{T}} + m_{\text{c}}l_{\text{T}}^2}{m_{\text{c}}l_{\text{T}}g}},$$

kde l_{red} je tzv. redukováná délka, tj. délka matematického kyvadla se stejnou periodou kmitů, g tíhové zrychlení, I_{T} moment setrvačnosti kyvadla vzhledem k ose procházející těžištěm kyvadla¹, m_{c} celková hmotnost kyvadla, l_{T} vzdálenost těžiště od osy otáčení.

Začneme hezky postupně, tedy momentem setrvačnosti I . V uvedeném vztahu se vyskytuje výraz $I_{\text{T}} + m_{\text{c}}l_{\text{T}}^2$. To však není podle Steinerovy věty² nic jiného než moment setrvačnosti vzhledem k ose otáčení procházející okem, za které je náš sněhulák zavěšen. Pro ulehčení budeme počítat rovnou tento moment setrvačnosti, označme si jej I . Náš sněhuláček se skládá ze dvou koulí, budeme tedy potřebovat moment setrvačnosti koule. Ten je vzhledem k ose procházející středem koule

$$I_{\text{k}} = \frac{2}{5}mr^2.$$

Hledaný moment setrvačnosti je součtem momentů setrvačnosti malé koule I_{m} a velké koule I_{v} . Pro jednotlivé koule jsou pak momenty setrvačnosti následující

$$I_{\text{v}} = I_{\text{k}}(M, R) + MR^2 = \frac{2}{5}MR^2 + MR^2 = \frac{7}{5}MR^2,$$

$$I_{\text{m}} = \frac{2}{5}mr^2 + m(2R + r)^2 = \frac{2^3 + 5 \cdot 2^6}{5 \cdot 9}mR^2.$$

Ještě si budeme potřebovat vyjádřit hmotnosti pomocí známých veličin, tedy pomocí ρ a R . Označme si M hmotnost velké koule a m hmotnost té malé. Máme tedy

$$M = \rho V = \frac{4}{3}\pi\rho R^3,$$

$$m = \frac{4}{3}\pi\rho r^3 = \frac{8}{27}\frac{4}{3}\pi\rho R^3 = \frac{8}{27}M.$$

Dosazením těchto hmotností do vzorců pro momenty setrvačnosti a následným upravením dostaneme

$$I_{\text{v}} = \frac{28}{15}\pi\rho R^5,$$

¹ Zde narážím na chybu v návodu, kde se tvrdí, že I (tady I_{T}) je moment setrvačnosti vzhledem k ose otáčení. Správnost zde uvedeného vzorce můžeme ověřit tím, že uvážíme hmotný bod, který má $I_{\text{T}} = 0$ a rovnice tak přejde k rovnici pro matematické kyvadlo. Vzhledem k tomu, že by návod měl být dostatečným materiálem k vypracování úlohy, nestrašoval jsem za to body.

² Popsána v návodu v zadání série, a tak ji zde nebudu popisovat podruhé.

$$I_m = \frac{2^8 + 5 \cdot 2^{11}}{5 \cdot 3^6} \pi \varrho R^5 = \frac{10496}{3645} \pi \varrho R^5$$

a výsledný moment setrvačnosti je tak

$$I = \frac{3460}{729} \pi \varrho R^5.$$

Pro dosažení do vztahu pro periodu kmitů na začátku nám už chybí jen vzdálenost těžiště od závěsu. Umístíme si počátek soustavy souřadnic do osy závěsu a nechme osu x procházet středy obou koulí. Podle předchozího vzoru označme polohy těžišť jednotlivých koulí X a x . Poloha těžiště je pak v této soustavě shodná s délkou l_T , která je

$$l_T = \frac{MX + mx}{M + m} = \frac{MR + \frac{8}{27}M(\frac{2}{3}R + 2R)}{\frac{35}{27}M} = \frac{29}{21}R.$$

Už máme vše potřebné k dosažení do vztahu pro periodu a určení periody T (je doufám jasné, že $m_c = m + M = \frac{140}{81} \pi \varrho R^3$). Dostáváme tedy

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\frac{3460}{729} \pi \varrho R^5}{\frac{140}{81} \pi \varrho R^3 \cdot \frac{29}{21} Rg}} = 2\pi \sqrt{\frac{\frac{3460}{729} R}{\frac{140}{81} \frac{29}{21} g}} = 2\pi \sqrt{\frac{173R}{87g}}.$$

Vzhledem k tomu, že mnozí použili chybný vztah z návodu, uvádím i řešení s použitím tohoto vztahu. Dosažením I za I_T ve vztahu pro periodu tak dostaneme

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{684R}{203g}}.$$

Tomáš

3.3 Drudeho teorie vodivosti

Úkol a (1 b.): Vyjádřete známý Ohmův zákon pomocí proudové hustoty j , měrného elektrického odporu ϱ a intenzity elektrického pole E .

Vyjdeme zde z Ohmova zákona ve tvaru

$$U = RI,$$

kde U je elektrické napětí, I je elektrický proud a konstanta úměrnosti je elektrický odpor R . Pro vyřešení tohoto úkolu potřebujeme znát vztahy

$$U = El, \quad j = \frac{Q}{tS} = \frac{I}{S}, \quad \varrho = \frac{RS}{l},$$

ve kterých je l délka vodiče a S jeho průřez.

Dosažením za U a I do Ohmova zákona dostaneme hledanou rovnost

$$E = \frac{RS}{l} j, \quad \text{tedy} \quad E = \varrho j.$$

Vidíme tedy, že mezi veličinami E a j je také přímá úměra, s konstantou úměrnosti měrným elektrickým odporem ϱ .

Úkol b (4 b.): Určete konstantu úměrnosti ϱ z Ohmova zákona ve tvaru dosaženém v úkolu a.

Z Newtonova zákona plyne pro sílu působící na jeden elektron rovnost $ma = eE$. Úkol vyřešíme tak, že do vztahu pro proudovou hustotu $j = ne\bar{u}$ dosadíme takovou střední driftovou rychlost, která odpovídá polovině rychlosti udělené zrychlením a od síly eE za střední dobu mezi srážkami τ . Označme maximální dosažitelnou driftovou rychlost u_{\max} . Z předchozího textu a ze vztahu mezi zrychlením a rychlostí pro ni plyne $u_{\max} = a\tau$. Pro střední driftovou rychlost \bar{u} potom tedy platí $\bar{u} = u_{\max}/2 = a\tau/2$. Vyjádřením zrychlení jednoho elektronu v elektrickém poli E z Newtonova zákona se dostaneme k následující sérii rovností

$$a = \frac{eE}{m} \quad \Rightarrow \quad u_{\max} = \frac{eE}{m}\tau \quad \Rightarrow \quad \bar{u} = \frac{eE}{2m}\tau.$$

Z poslední rovnosti už můžeme snadno dosadit do vztahu $j = ne\bar{u}$ pro proudovou hustotu a získáváme tak výraz

$$j = \frac{ne^2\tau}{2m} E,$$

ze kterého již přímo vidíme, že měrný elektrický odpor můžeme vyjádřit vztahem

$$\varrho = \frac{2m}{ne^2\tau}.$$

Úkol c (2 b.): S použitím Matematických, fyzikálních a chemických tabulek vy počítejte střední kvadratickou rychlost tepelného pohybu elektronů v plynu při pokojové teplotě (20 °C) a srovnajte tuto hodnotu se střední driftovou rychlostí v mědi při $j = 14 \text{ A mm}^{-2}$, $n = 8,5 \cdot 10^{22} \text{ cm}^{-3}$. Co lze říci o součtu těchto rychlostí?

Pro střední kvadratickou rychlost částic v plynu \bar{v} platí

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{3kT}{m}},$$

kde k je Boltzmannova konstanta, T je termodynamická teplota a m je hmotnost jedné částice v plynu. Hustotu proudu j ve vodiči s koncentrací elektronů n o elementárním náboji e při jejich střední driftové rychlosti \bar{u} lze vyjádřit vztahem

$$j = ne\bar{u}.$$

V následujících řádcích provedeme převody hodnot zadaných veličin do základních jednotek.

$$t = 20\text{ }^\circ\text{C} \Rightarrow T = 293,15\text{ K} \approx 293\text{ K}$$

$$n = 8,5 \cdot 10^{22}\text{ cm}^{-3} = 8,5 \cdot 10^{28}\text{ m}^{-3}$$

$$j = 14\text{ A mm}^{-2} = 14 \cdot 10^6\text{ A m}^{-2}$$

Pak můžeme psát

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{3kT}{m_e}}\text{ m/s} = \sqrt{\frac{3 \cdot 1,38 \cdot 293}{9,109}} \sqrt{\frac{10^{-23}}{10^{-31}}}\text{ m/s} = 11,5398 \cdot 10^4\text{ m/s} \approx 115\text{ km/s},$$

$$\bar{u} = \frac{j}{ne} = \frac{14}{8,5 \cdot 1,602} \frac{10^6}{10^{28} \cdot 10^{-19}}\text{ m/s} = 1,028 \cdot 10^{-3}\text{ m/s} \approx 1\text{ mm/s}.$$

Bez velké chyby tak můžeme o součtu střední kvadratické a driftové rychlosti říci, že se přibližně rovná střední kvadratické rychlosti, tedy

$$\bar{u} + \bar{v} \approx \bar{v}.$$

Úkol d (2 b.): Vyjděte z uvedeného tvaru Ohmova zákona a vyjádřete z něj měrný elektrický odpor ϱ jako funkci teploty, tedy $\varrho = \varrho(T)$.

Jelikož můžeme zanedbat příspěvek střední driftové rychlosti ke střední kvadratické rychlosti, je možné přibližně vyjádřit střední dobu mezi dvěma srážkami vztahem

$$\tau = \frac{\bar{l}}{\bar{v}},$$

v němž vystupují střední dráha mezi dvěma srážkami \bar{l} a již zmíněná střední kvadratická rychlost \bar{v} . Dosazením tohoto vztahu do vztahu pro ϱ z úkolu b) dostaneme

$$\varrho = \frac{2m_e\bar{v}}{ne^2\bar{l}},$$

kde již stačí dosadit závislost střední kvadratické rychlosti na teplotě a máme úkol hotový:

$$\rho = \frac{2m_e \sqrt{\frac{3kT}{m_e}}}{ne^2 \bar{l}} = \frac{2\sqrt{3m_e kT}}{ne^2 \bar{l}}.$$

Úkol e (2 b.): Ze vztahu odvozeného v úkolu d vyjádřete střední vzdálenost mezi srážkami \bar{l} pro měď stejné elektronové koncentrace a při stejné teplotě, jako jsme uvažovali výše. Hodnoty fyzikálních konstant dosaďte z tabulek, měrný elektrický odpor mědi je $\rho = 0,017 \mu\Omega \text{ m}$.

Střední vzdálenost mezi srážkami \bar{l} z poslední rovnosti vyjádříme takto:

$$\bar{l} = \frac{2\sqrt{3m_e kT}}{ne^2 \rho}.$$

Koncentraci elektronů v mědi uvažujeme stejnou jako v Úkolu c, to jest $n = 8,5 \cdot 10^{28} \text{ cm}^{-3}$, teplota je $T = 293 \text{ K}$, měrný elektrický odpor mědi je v základních jednotkách $\rho = 0,017 \cdot 10^{-6} \Omega \text{ m}$. Nyní zmíněné hodnoty jen dosadíme do předchozího vztahu, tedy

$$\bar{l} = \frac{2\sqrt{3 \cdot 9,109 \cdot 1,38 \cdot 293}}{8,5 \cdot (1,602)^2 \cdot 0,017} \frac{\sqrt{10^{-31} \cdot 10^{-23}}}{10^{28} \cdot 10^{-38} \cdot 10^{-6}} \text{ m} = 566,9 \cdot 10^{-11} \text{ m} \approx 5,67 \text{ nm}.$$

Z předchozího výpočtu tedy dostáváme pro střední vzdálenost mezi dvěma srážkami elektronu s ionty mřížky hodnotu v jednotkách nm, což je výsledek o řád vyšší, než jsme na základě předpokladů Drudeho modelu očekávali.

Úkol f (1 b.): Shrňte vlastními slovy, jakým způsobem se bude měnit elektrický odpor, budeme-li: zvyšovat teplotu, snižovat koncentraci elektronů nebo zvětšovat vzdálenost mezi dvěma srážkami \bar{l} .

Budeme-li zvyšovat teplotu, bude měrný elektrický odpor ρ růst úměrně \sqrt{T} . Při snižování koncentrace elektronů v látce bude docházet ke zvětšování měrného elektrického odporu. Naopak při prodlužování vzdálenosti mezi dvěma srážkami se bude ρ zmenšovat.

Nakonec ještě zajímavost k poslednímu úkolu. Že bude ρ růst spolu s teplotou je jednoduše vysvětlitelné tím, že střední kvadratická rychlost elektronů bude vyšší a tím pádem bude ke srážkám docházet častěji a průchod elektronového plynu jako celku tak bude náročnější. Ve skutečnosti zde do celé věci zasahují i kmity iontů v mřížce, které jsme my pro potřeby naší aproximace považovali za statické. Jsou to ale právě kmitající ionty, které vytvářejí rozptylová centra pro elektrony procházející látkou.

Při zmenšení koncentrace elektronů n dojde k tomu, že se zmenší proudová hustota j vyvolaná přiloženým polem E . Z Ohmova zákona pak přirozeně vyplývá, že následně se musí zvětšit ρ .

Bude-li vzdálenost mezi dvěma srážkami \bar{l} větší, bude elektronům stát v cestě méně překážek, a my si tak snadno můžeme představit, že se proudová hustota zvětší. Analogicky jako v odstavci výše se ρ tentokrát zmenší.

3.4 Robotické rameno – transformace souřadnic

Úkol a (3 b.): *Odvoď transformační matice (homogenní) mezi souřadnicovými systémy 1, 2, E do systému souřadnic světa W (značení viz na obr. 1; chceme tedy tři transformační matice – z 1 do W, z 2 do W a z E do W).*

Úkol b (3 b.): *Napiš v Octave (příp. Matlabu) funkci, která vrátí pozici (ve světových souřadnicích) kloubů a koncového nástroje na základě úhlů jednotlivých kloubů. Vektor úhlů bude vstupem do této funkce.*

Úkol c (3 b.): *Napiš v Octave (příp. Matlabu) funkci, která zobrazí rameno ve správné pozici jako 3D obrázek (funkce plot3). Jejím vstupem bude vektor úhlů jednotlivých kloubů. Nezapomeň popsat osy x, y, z . Zadané úhly vypiš do titulku obrázku. Uvažuj délky jednotlivých dílů ramene $L_1 = 1,3; L_2 = 1,2; L_3 = 1,1$.*

Úkol d (3 b.): *Vizualizuj (jako animaci) pohyb ramene ve 3D za použití souboru z adresy svat.fjfi.cvut.cz/files/SVAT_roboticke-rameno-uhly.txt. Soubor obsahuje tři sloupce odpovídající úhlům $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. Pro představu přikládáme ilustraci výsledné pozice ramene.*

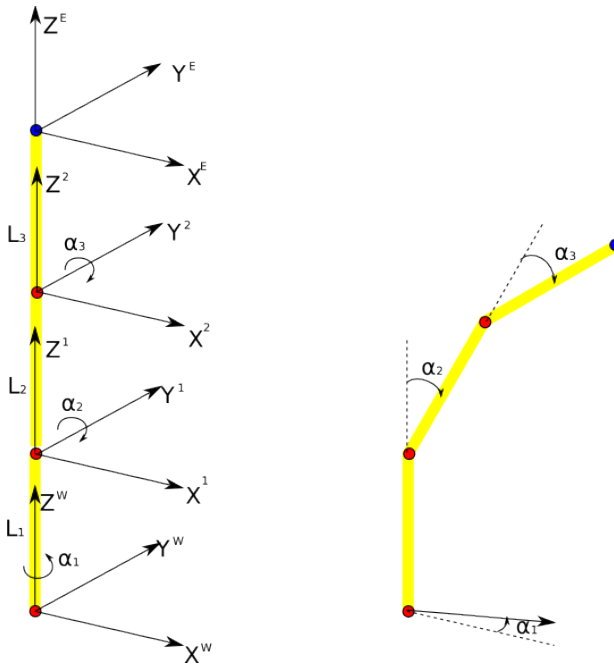
Transformace z 1 do W spočívá pouze v rotaci podél osy z a posunutí L_1 :

$$T_1^W = \begin{pmatrix} \cos \alpha_1 & -\sin \alpha_1 & 0 & 0 \\ \sin \alpha_1 & \cos \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & L_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Transformace z 2 do 1 je zajištěna rotací podél osy y a translací, která ovšem není jednoduše o L_2 , ale o $\begin{pmatrix} L_2 \sin \alpha_2 \\ 0 \\ L_2 \cos \alpha_2 \end{pmatrix}$:

$$T_2^1 = \begin{pmatrix} \cos \alpha_2 & 0 & \sin \alpha_2 & L_2 \sin \alpha_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \alpha_2 & 0 & \cos \alpha_2 & L_2 \cos \alpha_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Transformace z 2 do W je tedy součin: $T_2^W = T_1^W T_2^1$.



Obrázek 1 Model souřadnicových systémů ramene robota

Transformace z E do 2 je obdobná jako předchozí, tedy

$$T_{E}^{2} = \begin{pmatrix} \cos \alpha_3 & 0 & \sin \alpha_3 & L_3 \sin \alpha_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \alpha_3 & 0 & \cos \alpha_3 & L_3 \cos \alpha_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Konečně $T_{E}^{W} = T_{1}^{W} T_{2}^{1} T_{E}^{2}$.

Předchozí logika transformací je implementována ve funkci nazvané `preved_souradnice_bodu`, která dokáže převádět souřadnice mezi libovolnými systémy v obou směrech. Tedy i ze souřadnic světa do souřadnic kloubů. To ovšem nebylo v zadání vyžadováno. Samotná funkce, která vrací pozice kloubů a koncového nástroje na základě úhlů, se jmenuje `ziskej_souradnice_klobou`. Volá v sobě zmíněnou `preved_souradnice_bodu` s vhodnými parametry.

Zdrojový kód funkce `preved_souradnice_bodu.m`:

```

1 function [xNovy] = preved_souradnice_bodu(x, zeSystemu,
doSystemu, alfa)
2 %PREVED_SOURADNICE_BODU - převede souřadnice zadaného bodu
3 %'x' ze souřadného systému 'zeSystemu' do souřadného
4 %'doSystemu' za podmínky, že klouby ramene svírají úhly
5 %'alfa'. Vrátí bod 'xNovy' v patřičném souřadném systému.
```

```

6 %
7 %'xNovy' - bod v novém souř. s.
8 %'x' - bod ve starém souř. s. 'zeSystemu' [x_x; x_y; x_z]
9 %'zeSystemu' - vstupní souř. s. {1,2,3,4} == {'W','1','2','E'}
10 %'doSystemu' - cílový souř. s. {1,2,3,4} == {'W','1','2','E'}
11 %'alfa' - vektor úhlů kloubů [alfa1; alfa2; alfa3]
12
13 %-----Příprava-----%
14 L1 = 1.3;
15 L2 = 1.2;
16 L3 = 1.1;
17 alfa1 = alfa(1);
18 alfa2 = alfa(2);
19 alfa3 = alfa(3);
20 x = [x;1]; %homogenní souřadnice
21 T = zeros(4, 4, 3);
22 T_matice = eye(4, 4);
23 %-----Transformace mezi třemi souřadnými systémy-----%
24 t_W1 = [0; 0; L1];
25 t_12 = [sin(alfa2)*L2; 0; cos(alfa2)*L2];
26 t_2E = [sin(alfa3)*L3; 0; cos(alfa3)*L3];
27 R_W1 = [ cos(alfa1) -sin(alfa1) 0; sin(alfa1) cos(alfa1) 0; 0
0 1 ]; %rotace podél osy z
28 R_12 = [ cos(alfa2) 0 sin(alfa2); 0 1 0; -sin(alfa2) 0
cos(alfa2) ]; %rotace podél osy y
29 R_2E = [ cos(alfa3) 0 sin(alfa3); 0 1 0; -sin(alfa3) 0
cos(alfa3) ]; %rotace podél osy y
30 T(:, :,1) = [R_W1 t_W1; zeros(1,3) 1]; %T_W1
31 T(:, :,2) = [R_12 t_12; zeros(1,3) 1]; %T_12
32 T(:, :,3) = [R_2E t_2E; zeros(1,3) 1]; %T_2E
33 %-----Výpočet transformační matice-----%
34 vetsiSystem = max(zeSystemu, doSystemu);
35 rozdilSystemu = abs(zeSystemu - doSystemu);
36 for i = vetsiSystem-rozdilSystemu : vetsiSystem-1
37     T_matice = T_matice * T(:, :,i);
38 end
39 if (zeSystemu < vetsiSystem)
40     T_matice = inv(T_matice);
41 end
42 xNovy = T_matice * x;
43 xNovy = xNovy(1:3);
44 end

```

Zdrojový kód funkce `ziskej_souradnice_kloubu.m`:

```
1 function P = ziskej_souradnice_kloubu(alfa)
2 %ZISKEJ_SOURADNICE_KLOUBU - výpočet souřadnic kloubů v sys. W
3 %'P' - vektory souřadnic jednotlivých kloubů
4 %'alfa' - vektor úhlů jednotlivých kloubů
5
6 P = [0;0;0];
7 for i=1:3
8     P(:,i) = preved_souradnice_bodu([0;0;0], i+1, 1, alfa);
9 end
10 end
```

V následující funkci, nazvané `zobraz_rameno`, proběhne volání předchozí funkce a následně zobrazení vrácených bodů pomocí `plot3`.

```
1 function P = zobraz_rameno(alfa)
2 %ZOBRAZ_RAMENO - vykreslý rameno v zadané poloze
3 %   alfa - vektor tří úhlů jednotlivých ramen
4
5 P = ziskej_souradnice_kloubu(alfa);
6 plot3([0,P(1,:)],[0,P(2,:)],[0,P(3,:)], '-ro');
7 title(round(alfa*180/pi)');
8 xlabel('X');
9 ylabel('Y');
10 zlabel('Z');
11 box('on');
12 grid('on');
13 xlim([-2.3 2.3]);
14 ylim([-2.3 2.3]);
15 zlim([0 3.6]);
16 end
```

Ve funkci `zobraz_pohyb_ramene` probíhá jednoduše načtení dat ze souboru a vykreslování všech pozic kloubů v cyklu.

```
1 data = load('uhly.txt');
2 for i = 1:length(data)
3     zobraz_rameno( data(i, :) );
4     drawnow
5 end
```

David

Výsledková listina 3. série

| | Jméno | r. | v. | b_1 | b_2 | b_3 | b_4 | b_T | $\sum f(b_i)$ |
|---|-------------------|----|----|-------|-------|-------|-------|------------------|---------------|
| 1 | Ondřej Poláček | 3 | 3 | 5 | 4,5 | 10,0 | 10 | 6 ⁽⁹⁾ | 36,80 |
| 2 | Vojtěch Laitl | 0 | 3 | 1 | 0 | 3,5 | 2 | 4 | 16,97 |
| 3 | Martin Scheubrein | 3 | 3 | 5 | – | – | 2 | 6 ⁽⁹⁾ | 13,68 |
| 4 | Šimon Jelínek | 3 | 3 | 5 | 4,5 | 3,0 | – | – | 13,49 |
| 5 | Petr Doležal | 4 | 2 | – | – | – | – | 6 ⁽⁷⁾ | 6,00 |
| 6 | Dominika Jochcová | 4 | 3 | – | 2,5 | 1,0 | – | – | 3,70 |

r. – ročník řešitele (ekvivalent střední školy či čtyřletého gymnázia, 0 znamená jakýkoliv nižší ročník), v. – počet řešených sérií, b_i – body za jednotlivé úlohy (pomlčka znamená neřešil), $\sum f(b_i)$ – součet bodů za jednotlivé úlohy zvýhodňující mladší a méně zkušené řešitele

Celková výsledková listina

| | Jméno | 1. série | 2. série | 3. série | celkem |
|----|--------------------|----------|----------|----------|--------|
| 1 | Ondřej Poláček | 38,98 | 34,21 | 36,80 | 109,99 |
| 2 | Šimon Jelínek | 28,99 | 35,50 | 13,49 | 77,99 |
| 3 | Martin Scheubrein | 29,93 | 28,69 | 13,68 | 72,30 |
| 4 | Vojtěch Laitl | 21,61 | 20,58 | 16,97 | 59,16 |
| 5 | Jiří Růžička | 24,59 | 21,19 | 0,00 | 45,78 |
| 6 | Jiří Jičínský | 18,61 | 18,21 | 0,00 | 36,82 |
| 7 | Petr Doležal | 29,54 | 0,00 | 6,00 | 35,54 |
| 8 | Jakub Salavec | 5,00 | 19,36 | 0,00 | 24,36 |
| 9 | Dominika Jochcová | 5,90 | 11,45 | 3,70 | 21,05 |
| 10 | Jan Petr | 6,13 | 13,77 | 0,00 | 19,91 |
| 11 | Marie Zlínková | 17,73 | 0,00 | 0,00 | 17,73 |
| 12 | Kateřina Smítalová | 13,00 | 0,00 | 0,00 | 13,00 |
| 13 | Dominik Krasula | 0,00 | 8,21 | 0,00 | 8,21 |
| 14 | Ondřej Daneš | 5,64 | 0,00 | 0,00 | 5,64 |
| 15 | Ondřej Brunner | 2,95 | 0,00 | 0,00 | 2,95 |