Zadání úloh 3. série

3.1 n-rozměrné bytosti

V první sérii jsme vám přinesli příběh o čtyřrozměrných bytostech, které používají k zápisu trojrozměrný papír. Nyní posuneme naši abstraktní představivost na další úroveň[1]. Představme si tedy vesmír o n prostorových dimenzích, ve kterém žije nepříliš vyspělá civilizace používající k zápisu papír ve tvaru hyperkvádru o dimenzi $n-1$.

Úkol a *(3 b.)*: *Pomozte jim najít takový poměr délek hran papíru, aby platilo, že když jej přeloží napůl, získají hyperkvádr se stejným poměrem hran. Definujeme papír formátu A0 v n dimenzích jako hyperkvádr o objemu $1\,\zeta^{n-1}$ (ζ je jednotka délky) s těmito poměry hran. Formát A1 získáme půlením nejdelší hrany papíru A0, A2 rozpůlením A1 atd. Najděte obecný vztah pro délky hran papíru formátu AN.*

Úkol b *(2 b.)*: *Definujme papír formátu BN jako útvar, jehož délky hran jsou geometrickými průměry délek odpovídajících hran $A(N-1)$ a AN. Existují při dané dimenzi n nejaká přirozená čísla M a P tak, že jedna z hran papíru BM je stejně dlouhá jako nějaká hrana papíru AP?*

Možná tě v zadání úkolu zarazilo použití geometrického průměru. Každý pravděpodobně zná průměr aritmetický, který se vypočítá jako součet daných čísel dělený jejich počtem. Geometrický průměr je podobný, ovšem místo sčítání se násobí a místo dělení se odmocňuje. Geometrický průměr n čísel $a_1, \dots a_n$ bude tedy n-tá odmocnina jejich součinu

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot \dots \cdot a_n}.$$

Na závěr ještě upozorníme na to, že značení řad formátů písmeny A a B jsme nevybrali náhodně. Zvolíme-li $1\,\zeta = 1\,\mathrm{m}$ a $n = 3$, pak definice přesně odpovídá formátům papírů podle normy ISO 216 používané téměř po celém světě. Své obecné závěry proto můžete snadno ověřit tak, že se podíváte odpovídají-li vypočítané rozměry našim známým, nudně dvojrozměrným listům papíru, které běžně používáme.

Jirka

3.2 Sněhulák

Na střední škole se většinou zabýváme pouze kyvy matematického kyvadla. To sestává z hmotného bodu na nehmotné tyči. Zajímá-li nás reálnější obraz světa, můžeme se zabývat tzv. *fyzickým kyvadlem.* Fyzické kyvadlo představuje dokonale

[1] Novým řešitelům doporučujeme se nejprve podívat na zadání a autorské řešení úlohy 1.1 Čtyřrozměrné bytosti

tuhé těleso upevněné v jednom bodě, které se kýve bez tření. Doba jeho kyvu se překvapivě spočítá stejně jako doba kyvu matematického kyvadla, nahradíme-li skutečnou délku kyvadla tzv. *redukovanou délkou*

$$l_{\text{red}} = \frac{I + ml^2}{ml},$$

kde I je moment setrvačnosti kyvadla vzhledem k ose kyvu, m jeho hmotnost a l vzdálenost osy kyvu od těžiště. Pokud jste ve škole zatím nebrali otáčivý pohyb, a tedy nevíš, co je moment setrvačnosti, poslouží ti následující krátký úvod.

Kinetická (neboli pohybová) energie T (taktéž se často značí E_{k}) je energie daná pohybem tělesa, tedy jeho aktuální rychlostí. Vypočte se pomocí známého vztahu

$$T = \frac{1}{2}mv^2,$$

který je ovšem možné použít jen pro hmotné body. Máme-li reálné těleso složené ze spousty bodů, museli bychom jeho kinetickou energii počítat jako součet kinetických energií všech těchto bodů. Naštěstí je-li těleso dokonale tuhé, lze jeho pohyb rozložit na posuvný pohyb těžiště rychlostí v a rotaci kolem nějaké osy úhlovou rychlostí ω. Kinetickou energii lze pak vyjádřit ve tvaru

$$T = T_{\text{t}} + T_{\text{r}} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2.$$

Veličině I se říká *moment setrvačnosti*. Momenty setrvačnosti se liší pro různé tvary tělesa a volby osy otáčení. V úloze budeme potřebovat moment setrvačnosti koule. Ten se pro osu otáčení procházející středem koule vypočítá jako

$$I = \frac{2}{5}mr^2.$$

Budeme však potřebovat znát moment setrvačnosti koule i pro jiné osy otáčení. Pokud máme zadaný moment setrvačnosti kolem osy procházející těžištěm I_{T}, ale těleso rotuje kolem osy neprocházející těžištěm, můžeme použít Steinerovu větu, která říká

$$I = I_{\text{T}} + MR^2,$$

kde M je hmotnost tělesa, I_{T} moment setrvačnosti pro osu procházející těžištěm a I moment setrvačnosti pro rovnoběžnou osu ve vzdálenosti R.

Úhlová rychlost je analogie obyčejné rychlosti udávající rychlost rotace. Úhlová rychlost při rovnoměrném kruhovém pohybu se tedy vypočítá ze vzorce

$$\omega = \frac{\varphi}{t},$$

kde φ je uražený úhel za čas t. Jednotkou je rad/s.

Úkol a *(5 b.): Sněhulák složený ze dvou koulí o poloměrech R a $\frac{2}{3}R$ je násilně mučen zavěšením „hlavou dolů“ a následným houpáním. Spočítejte periodu kmitů takto zavěšeného sněhuláka ve chvíli, kdy se sněhulák už jenom dohupuje a výchylka je tedy malá. Hustota sněhu použitého na stavbu sněhuláka je ϱ.*

Tomáš

3.3 Drudeho teorie vodivosti

V této úloze se zamyslíme nad elektrickou vodivostí v pevných látkách, zejména kovech, a to způsobem, který před více než sto lety zvolil německý fyzik P. Drude – po něm se tento model nazývá Drudeho teorií elektrické vodivosti. V následujících úvahách přeformulujeme známý Ohmův zákon pomocí veličin, které se více hodí pro popis jevů na atomární úrovni, a s jeho využitím se pokusíme vyjádřit elektrický odpor.

V roce 1900, jen tři roky po objevení elektronu J. J. Thompsonem, přišel Drude s modelem elektronového plynu, který měl být zodpovědný za dobrou elektrickou vodivost kovů. Tato představa vychází z předpokladu, že v pevné látce se vyskytují volné nelokalizované elektrony, které se vyznačují slabou vázaností k atomům kovu a jsou v látce stejně pohyblivé jako částice ideálního plynu. Úloha o elektrické vodivosti pevných látek tak dostala zcela novou podobu, neboť na ni bylo možné aplikovat již známé metody statistické fyziky, zejména kinetickou teorii plynů.

Představme si, jak by takový elektronový plyn vypadal, jaké jeho vlastnosti můžeme předpokládat a co za daných okolností zanedbáme. Ze všeho nejdříve budeme tedy předpokládat, že pohyb částic v plynu lze popsat pomocí kinetické teorie plynů, tj. elektrony nemají žádné omezení na směr svého pohybu (pohyb částic plynu je dokonale chaotický) a pohyb se děje v poli konstantního potenciálu (t.j. částice nemají zrychlení). Nepředpokládáme vzájemné interakce elektronů. V látce dochází jen ke srážkám elektronů s ionty mřížky, které považujeme za statické. Po takové srážce bude elektron odražen s náhodnou rychlostí do náhodného směru, přičemž rychlost elektronu v libovolném místě soustavy bude přímo úměrná teplotě v tomto místě.

Podle kinetické teorie plynů platí pro střední kinetickou energii částic v plynu

$$E_{\mathrm{k}} = \frac{1}{2} m \bar{v}^2 = \frac{3}{2} kT,$$

kde $\bar{v}$ je střední kvadratická rychlost částic, m je hmotnost částic, k je Boltzmannova konstanta a T je termodynamická teplota. Odtud již plyne závislost střední kvadratické rychlosti na teplotě

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}.$$

Jedním z nejznámějších vztahů v elektřině je bezesporu Ohmův zákon – přímá úměra mezi elektrickým napětím a proudem, kde konstantou úměrnosti je elektrický odpor. Všechny tyto veličiny jsou makroskopicky pozorovatelné, ale pro popis jevů na atomární úrovni se více hodí jiná trojce veličin – intenzita elektrického pole E, měrný elektrický odpor ϱ a proudová hustota j. S prvními dvěma veličinami jste se už nejspíše setkali, ať už ve škole nebo v našich předchozích úlohách, poslední veličina udává množství náboje, které projde jednotkovou plochou za jednotku času.

Katedra inženýrství pevných látek

Katedra zajišťuje bakalářské a magisterské studium oboru inženýrství pevných látek. Cílem tohoto studia je na základě atomární a elektronové struktury látek v kondenzované fázi vytvořit jejich mikrofyzikální teorii a na jejím základě interpretovat širokou škálu jejich makroskopických vlastností – mechanických, tepelných, elektrických, magnetických a optických.

Úkolem je z rozmanité vnitřní struktury pevných látek a odpovídajícího bohatého spektra pozorovaných jevů prezentovat hlavní teoretické a experimentální metody potřebné k jejich vysvětlování a podat přehled současných aplikací. Základem studia jsou dílčí disciplíny fyziky pevných látek a specializované laboratorní kurzy.

Absolvent tohoto oboru najde uplatnění na akademických a průmyslových pracovištích, zabývajících se výzkumem a vývojem ve specializované oblasti, například ve fyzice polovodičů, magnetických materiálů, dielektrik a supravodičů, ve fyzice tenkých vrstev a nízkodimensionálních systémů, ve fotovoltaice, ve fyzice nízkých teplot i ve speciálních laboratořích pracujících s technikami optické spektroskopie, rentgenové a neutronové difrakce a elektrických měření.

Pracovníci katedry odborně spolupracují s ústavy Akademie věd ČR a s výzkumnými průmyslovými ústavy a s akademickými pracovišti v zahraničí.

V předložené úloze je třeba zformulovat souvislost mezi známým Ohmovým zákonem pro elektrickou vodivost pevných látek a jednoduchým mikroskopickým modelem tohoto jevu. Transportní elektrické procesy v pevných látkách jsou stále intenzivně zkoumány a jsou základní součástí vyvíjených nových technických zařízení.

Úkol a *(1 b.)*: *Vyjádřete známý Ohmův zákon pomocí proudové hustoty, měrného elektrického odporu a intenzity elektrického pole.*

Představme si, že jsme vložili do elektrického pole kus kovu (jinými slovy jsme na kov přiložili napětí). Částice elektronového plynu se před přiložením napětí pohybovaly v kovu chaoticky rychlostí $\bar{v}$ úměrnou teplotě. Po jeho přiložení ale na všechny částice začne působit síla eE, udělující jim zrychlení a v jednom směru, jejímž vlivem se celý oblak plynu začne v kovu přesouvat střední driftovou rychlostí $\bar{u}$. Takto si představujeme elektrický proud.

Úkol b *(4 b.)*: *Určete konstantu úměrnosti ϱ z Ohmova zákona ve tvaru dosaženém v úkolu a.*

Za střední hodnotu driftové rychlosti berte polovinu maximální dosažitelné rychlosti při dané (střední) době mezi dvěma srážkami τ. Označíme-li koncentraci elektronů v kovu n, elementární náboj e a střední driftovou rychlost $\bar{u}$, pak je možné hustotu elektrického proudu zapsat ve tvaru

$$j = ne\bar{u}.$$

Dále předpokládáme, že elektrony naráží do iontů mřížky. Proto veličina $\bar{l}$ ve vzorci

$$\tau = \frac{\bar{l}}{\bar{u} + \bar{v}}$$

odpovídá meziatomovým vzdálenostem v kovu.

Úkol c *(2 b.)*: *S použitím Matematických, fyzikálních a chemických tabulek vypočítejte střední kvadratickou rychlost tepelného pohybu elektronů v plynu při pokojové teplotě (20 °C) a srovnejte tuto hodnotu se střední driftovou rychlostí v mědi při* $j = 14\,\mathrm{A\,mm^{-2}}$, $n = 8{,}5 \cdot 10^{22}\,\mathrm{cm^{-3}}$. *Co lze říci o součtu těchto rychlostí?*

Úkol d *(2 b.)*: *Vyjděte z uvedeného tvaru Ohmova zákona a vyjádřete z něj měrný elektrický odpor* ϱ *jako funkci teploty, tedy* $\varrho = \varrho(T)$.

Úkol e *(2 b.)*: *Ze vztahu odvozeného v úkolu d vyjádřete střední vzdálenost mezi srážkami* $\bar{l}$ *pro měď stejné elektronové koncentrace a při stejné teplotě, jako jsme uvažovali výše. Hodnoty fyzikálních konstant dosaďte z tabulek, měrný elektrický odpor mědi je* $\varrho = 0,017\,\mu\Omega\,\mathrm{m}$.

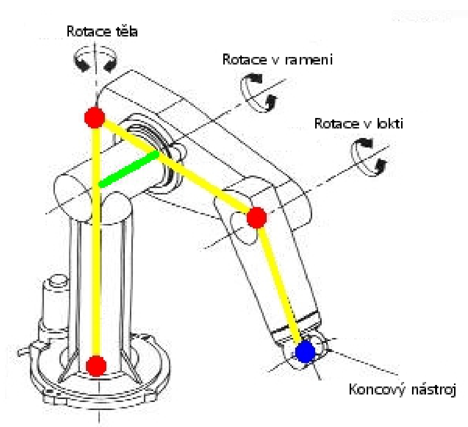
Naplnil se náš předpoklad, že $\bar{l}$ odpovídá meziatomovým vzdálenostem? Nenechte se zmást, jestliže vám výsledek vyšel v jednotkách nm, pak jste pravděpodobně počítali správně. To je ovšem hodnota asi o řád větší, než je meziatomová vzdálenost v dané látce. Zdá se tedy, že námi rozpracovávaný model nesouhlasí se skutečností úplně. Podíváme-li se však pozorněji na vztah pro měrný elektrický odpor, můžeme si povšimnout, že kvalitativně skutečnost vystihuje poměrně slušně.

Úkol f *(1 b.)*: *Shrňte vlastními slovy, jakým způsobem se bude měnit elektrický odpor, budeme-li: zvyšovat teplotu, snižovat koncentraci elektronů nebo zvětšovat vzdálenost mezi dvěma srážkami* $\bar{l}$.

Zde je třeba podotknout, že ve skutečnosti se elektron nerozptyluje na jednotlivých iontech ve struktuře látky, nýbrž na nehomogenitách, které se v ní vyskytují. Odtud je již zřejmé, že vzdálenost mezi dvěma srážkami může být větší než meziatomová vzdálenost.

Ve skutečnosti je otázka elektrické vodivosti mnohem složitější a Drudeho teorie byla jen jedním z prvních kroků směrem k jejímu plnému pochopení. Její význam je mimo jiné v tom, že vysvětlila příčinu elektrického odporu, Ohmův zákon a podstatu elektrické vodivosti kovů. Na druhou stranu Drudem nalezená závislost elektrického odporu na teplotě nesouhlasí s experimentem. Později byly vytvořeny další teorie elektrické vodivosti, které jsou již komplexnější a vycházejí z kvantové mechaniky.

Martin



Obrázek 1 3D vizualizace paže robota se třemi klouby (stupni volnosti)

3.4 Robotické rameno – transformace souřadnic

Tato úloha bude tzv. „na pokračování“, navazující kapitoly budou následovat v dalších sériích semináře. V praxi poznáš, v čem tkví kouzlo matematiky v kombinaci s vhodně použitým softwarem. Celá úloha tě provede problematikou simulace pohybu a ovládání robotického ramene s více klouby, jehož podobu můžeš vidět na obrázku 1. Výsledkem bude efektní video pohybu modelovaného robota. Že je to moc složité? Ale kdeže, přesvědč se sám! Stačí následovat návod a zapojit trochu vlastní invence. Odměnou ti bude sladký pocit ze zdárně vyřešeného problému, který ti dodá sebedůvěry pustit se do dalších tvůrčích řešení!

Tato kapitola bude zaměřena na transformace, které se používají pro převádění z jednoho souřadnicového systému do jiného. A následně zobrazení ramena v kýžené poloze pomocí programu Octave, jehož základní užívání se můžeš naučit v aktuálním dílu tutoriálu. Nejprve si osvětleme základní pojmy lineární algebry – vektor a matice.

Vektory, matice a jak se mezi sebou násobí

Vektor je sloupec čísel, který v našem příkladě bude představovat bod v prostoru. Pro každý rozměr je v předpisu vektoru jedno číslo vyjadřující vzdálenost od počátku soustavy souřadnic v dané ose. Například vektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ je vzdálený jednu jednotku od počátku soustavy ve směru osy x.

Matici si můžeme představit jako tabulku čísel s určitým počtem řádků a sloupců, kde na každé pozici je jedno číslo. Například matice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$. Vektor je také vlastně matice. Například náš vektor $\vec{x}$ je maticí o rozměrech 3×1.

Sčítání matic (tedy i vektorů) se provádí intuitivně prvek po prvku. Podmínkou je, že sčítané matice jsou stejných rozměrů. Tedy $\vec{x} + \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Součin dvou matic je složitější, nestačí pouze vynásobit odpovídající členy. Nezbytné je, aby počet sloupců první matice odpovídal počtu řádků druhé matice. V opačném případě matice nelze násobit. Násobí se následovně: první číslo z prvního řádku první matice se vynásobí s prvním číslem z prvního sloupce druhé matice, k výsledku se přičte násobek druhého čísla řádku a druhého čísla sloupce a tak dále. Výsledek se zapíše na pozici $(1, 1)$ výsledné matice. Takto se pokračuje se všemi řádky první matice a odpovídajícími sloupci té druhé. Předvedeme si to na jednoduchém příkladě:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 10 \\ 11 & 12 \end{pmatrix}$$

$$1 \cdot 7 + 2 \cdot 9 + 3 \cdot 11 = 58$$

$$1 \cdot 8 + 2 \cdot 10 + 3 \cdot 12 = 64$$

$$4 \cdot 7 + 5 \cdot 9 + 6 \cdot 11 = 139$$

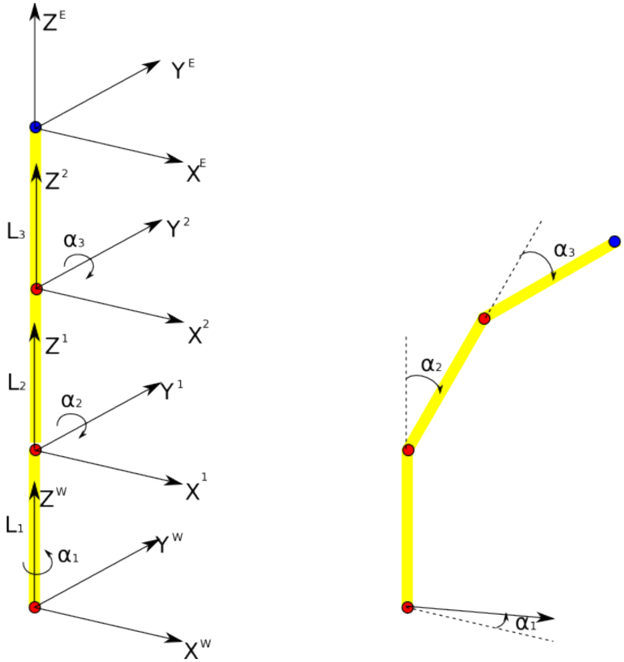
$$4 \cdot 8 + 5 \cdot 10 + 6 \cdot 12 = 154$$

$$A \cdot B = AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 10 \\ 11 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 58 & 64 \\ 139 & 154 \end{pmatrix}$$

Popis robotického ramene

Na obrázku 2 je zjednodušený popis robotického ramene. Jedná se o mírné zjednodušení skutečného robotického ramene z obrázku 1, které má ještě odsazení před druhým kloubem (zvýrazněno zeleně). Ale to v našem příkladu nebudeme brát v potaz. Všechny uzly a koncový nástroj tedy leží v jedné rovině 3D prostoru. První kloub se otáčí okolo osy z, zatímco klouby 2 a 3 ve svých osách y.

Při používání robotického ramene pro uchopování předmětů a jinou interakci se světem je vhodné umět vyjádřit pozici objektu v souřadnicích koncového nástroje. Jindy je zase jednodušší to udělat v souřednicích okolního světa (takto budeme nazývat souřadnice pevně svázané se zemí). Nejelegantnější ale bude, naučit se převádět souřadnice obecně mezi libovolnými systémy.



Obrázek 2 Vlevo je zjednodušený model robotického ramene s vyznačenými souřednicovými systémy ve třech kloubech (červeně) a v koncovém nástroji (modře). Vpravo jsou vyznačeny roviny rotace jednotlivých kloubů.

Souřadné systémy a transformace mezi nimi

Uvažujme bod v prostoru reprezentovaný vektorem

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Pokud je vztah mezi dvěma souřadnicovými systémy pouze rotace okolo některé z os, potom můžeme převést bod (vektor) vyjádřený v druhém (2) (zrotovaném) souřadnicovém systému do prvního (1) pomocí vztahu, který obsahuje rotační matici. Rotační matice pro rotace okolo os x, y a z jsou následující:

$$R_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\vartheta_x & -\sin\vartheta_x \\ 0 & \sin\vartheta_x & \cos\vartheta_x \end{pmatrix}$$

$$R_y = \begin{pmatrix} \cos\vartheta_y & 0 & \sin\vartheta_y \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\vartheta_y & 0 & \cos\vartheta_y \end{pmatrix}$$

$$R_z = \begin{pmatrix} \cos\vartheta_z & -\sin\vartheta_z & 0 \\ \sin\vartheta_z & \cos\vartheta_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Souřadnice v novém, zrotovaném systému pak vyjádříme jako

$$\vec{x}^1 = R\vec{x}^2,$$

kde za R dosadíme matici příslušné rotace, tedy R_x, R_y nebo R_z.

Úhel ϑ vždy vyjadřuje, o kolik je druhý souřadnicový systém pootočený oproti prvnímu v dané ose.

Pokud jsou dva souřadné systémy svázány pouze posunutím bez rotace, potom lze vztah mezi nimi vyjádřit jako:

$$\vec{x}^1 = \vec{x}^2 + \vec{t}, \quad \vec{t} = \begin{pmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{pmatrix},$$

kde t je vždy posunutí v dané ose. Kombinací obou potom lze převádět souřadnici z druhého systému do prvního pomocí:

$$\vec{x}^1 = R\vec{x}^2 + \vec{t}.$$

Navíc je výhodné použít tzv. homogenní souřadnice, což znamená přidat k původnímu vektoru na konec jedničku:

$$\vec{X} = \begin{pmatrix} \vec{x} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

S využitím homogenních souřadnic můžeme horní výraz v maticovém tvaru zapsat takto:

$$\vec{X}^1 = T\vec{X}^2,$$

$$T = \begin{pmatrix} R & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Například pro transformační matici pro případ rotace okolo osy z a posunutí (translace):

$$T_z = \begin{pmatrix} \cos\vartheta_z & -\sin\vartheta_z & 0 & t_x \\ \sin\vartheta_z & \cos\vartheta_z & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Největší výhodou transformačních matic je možnost kombinovat libovolné transformace nasobením jejich matic. Například transformace ze souřadnicového systému 2 do 1 a ze systému 3 do 2 je možno nakombinovat následovně:

$$\vec{X}^1 = T_2^1 \vec{X}^2$$
$$\vec{X}^2 = T_3^2 \vec{X}^3$$

$$\vec{X}^1 = T_2^1 \vec{X}^2 = T_2^1 T_3^2 \vec{X}^3.$$

Z toho je vidět, že transformační matice z třetího do prvního souřadnicového systému je součin dílčích transformací:

$$T_3^1 = T_2^1 T_3^2$$

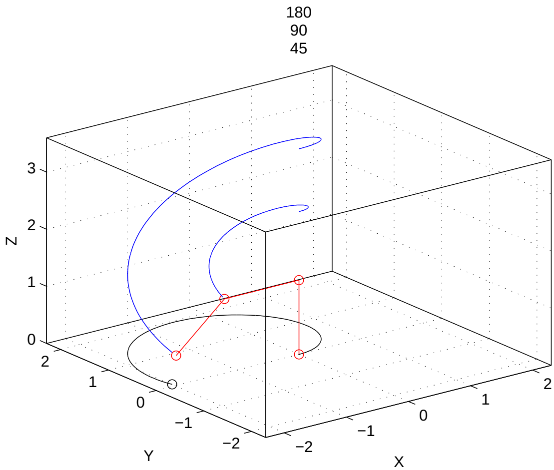
Úkol a *(3 b.)*: *Odvoď transformační matice (homogenní) mezi souřadnicovými systémy 1, 2, E do systému souřadnic světa W (značení viz na obr. 2; chceme tedy tři transformační matice – z 1 do W, z 2 do W a z E do W).*

Úkol b *(3 b.)*: *Napiš v Octave (příp. Matlabu) funkci, která vrátí pozici (ve světových souřadnicích) kloubů a koncového nástroje na základě úhlů jednotlivých kloubů. Vektor úhlů bude vstupem do tého funkce.*

Úkol c *(3 b.)*: *Napiš v Octave (příp. Matlabu) funkci, která zobrazí rameno ve správné pozici jako 3D obrázek (funkce* `plot3`*). Jejím vstupem bude vektor úhlů jednotlivých kloubů. Nezapomeň popsat osy x, y, z. Zadané úhly vypiš do titulku obrázku. Uvažuj délky jednotlivých dílů ramene $L_1 = 1{,}3$; $L_2 = 1{,}2$; $L_3 = 1{,}1$.*

Úkol d *(3 b.)*: *Vizualizuj (jako animaci) pohyb ramene ve 3D za použití souboru z adresy* `svat.fjfi.cvut.cz/files/SVAT_roboticke-rameno-uhly.txt`*. Soubor obsahuje tři sloupce odpovídající úhlům $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. Pro představu přikládáme ilustraci výsledné pozice ramene, viz obrázek 3.*

David



Obrázek 3 Ilustrace výsledné pozice ramene s vyznačenými drahami kloubu a koncového nástroje. Dráha koncového nástroje je také promítnuta do spodní roviny XY.