Řešení úloh 1. série

1.1 Čtyřrozměrné bytosti

Ve vesmíru o čtyřech prostorových dimenzích žije nepříliš vyspělá civilizace čtyřrozměrných bytostí, které k zápisu informací používají papír ve tvaru kvádru.

Úkol a *(3 b.)*: *Pomozte jim najít takový poměr délek hran papíru, aby platilo, že když jej přeloží napůl, získají kvádr se stejným poměrem hran. (Sami se zamyslete nad tím, co znamená překládat takový papír ve čtyřech dimenzích.)*

Úkol b *(2 b.)*: *Definujme papír formátu A0 ve čtyřech dimenzích jako kvádr o objemu* $1\,\zeta^3$ *(ζ je jednotka délky) s poměry hran z předchozí části úlohy. Formát A1 pak získáme půlením nejdelší hrany papíru A0, A2 rozpůlením A1 atd. Najděte obecný vztah pro délky hran papíru o formátu AN, kde N je přirozené číslo.*

Označme si jednotlivé hrany kvádru sestupně podle velikosti jako a, b, c. Po přeložení dostaneme kvádr s hranami o délkách b, c, $\frac{a}{2}$ (opět podle velikosti). Abychom zachovali poměr hran, musí a, b, c splňovat následující soustavu rovnic:

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c}, \quad \frac{b}{c} = \frac{c}{\frac{a}{2}}, \quad \frac{c}{a} = \frac{\frac{a}{2}}{b}.$$

Řešením této soustavy metodou dosazování získáme vztah $a = 2^{\frac{1}{3}} b = 2^{\frac{2}{3}} c$. Hledaný poměr délek hran papíru je tedy $a : b : c = 1 : 2^{-\frac{1}{3}} : 2^{-\frac{2}{3}}$.

Označíme si a_n, b_n, c_n délky hran papíru formátu An. Z definice A0 a rešení první cásti úlohy plyne, že $a_0 = 2^{\frac{1}{3}}$, $b_0 = 1$ a $c_0 = 2^{-\frac{1}{3}}$. Pro ostatní n musí platit následující rekurentní vztahy: $a_n = b_{n-1}$, $b_n = c_{n-1}$, $c_n = \frac{a_{n-1}}{2}$. Stačí nám pouze jedna z těchto rekurencí, neboť můžeme využít známý poměr hran papíru

$$a_n = b_{n-1} = 2^{-\frac{1}{3}} a_{n-1} = 2^{-\frac{1}{3}} \cdot 2^{-\frac{1}{3}} a_{n-2} = \ldots = 2^{-\frac{n}{3}} a_0 = 2^{-\frac{n-1}{3}}.$$

Když opět využijeme známý poměr hran papíru, snadno dopočítáme velikosti b_n i c_n. Výsledkem nakonec bude

$$a_n = 2^{-\frac{n-1}{3}}, \quad b_n = 2^{-\frac{n}{3}}, \quad c_n = 2^{-\frac{n+1}{3}}.$$

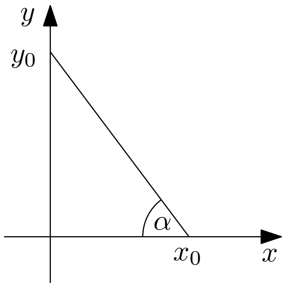
Jirka

1.2 Vymetená křivka

Úkol *(5 b.)*: *Mějme v kartézské soustavě úsečku, jejíž jeden konec je upevněn k ose x a druhý k ose y. Zjistěte tvar stopy takové úsečky při pohybu v soustavě. Hledáme tedy množinu bodů ležících na libovolné úsečce AB splňující $|AB| = 1$, $A \in x$ a $B \in y$. Zkuste co nejpřesněji určit její obsah.*

Jako první způsob řešení určíme funkční předpis vymetené křivky. Budeme uvažovat pouze situaci v prvním kvadrantu, jako tomu bylo na obrázku v zadání či na podlaze autobusu. Je zřejmé, že v ostatních kvadrantech bude situace symetrická.

Nejprve se pokusme funkčně popsat úsečku v nějakém okamžiku. Ten okamžik je potřeba charakterizovat nějakým parametrem. Takovým parametrem může být například krajní bod úsečky x_0 nebo y_0 či úhel α, který svírá úsečka s osou x.



Obrázek 1 Parametrizace polohy úsečky.

Úsečka je část lineární funkce, její předpis tedy bude $y = kx + q$ pro $x \in \langle 0, 1 \rangle$. Z požadavku, aby $y = y_0$ pro $x = 0$ a zároveň $x = x_0$ pro $y = 0$, se snadno dopočítá, že $k = -y_0/x_0$ a $q = y_0$. Je vhodné polohu úsečky charakterizovat pouze jedním parametrem, aby byla parametrizace jednoznačná. Nabízí se několik různých vyjádření úsečky, například

$$y = -\frac{\sqrt{1 - x_0^2}}{x_0} x + \sqrt{1 - x_0^2}, \quad y = -\frac{y_0}{\sqrt{1 - y_0^2}} x + y_0, \quad y = -x \operatorname{tg} \alpha + \sin \alpha.$$

Ve vymetené oblasti budou všechny body $[x, y]$, kterými prochází nějaká úsečka. Pro nějaké pevné x bude na hranici této oblasti bod $[x, y]$ s nejvyšším y. Naším úkolem je tedy pro každé pevné x najít úsečku takovou, aby v bodě s x-ovou souřadnicí x měla maximální y-ovou souřadnici. Vezmeme-li například poslední parametrizaci, pak hledáme pro každé x vhodný parametr α tak, aby $-x \operatorname{tg} \alpha + \sin \alpha$ bylo maximální. To lze těžko uhodnout zpaměti, proto je potřeba použít diferenciální počet.

Vezměme si tedy funkci $f(\alpha) = -x \operatorname{tg} \alpha + \sin \alpha$, přičemž x je nějaká konstanta a $\alpha \in \langle 0, \pi \rangle$. Teorie nám říká, že nabývá-li tato funkce někde maxima, pak tam bude mít nulovou derivaci. Opačná implikace sice neplatí, ale víme, že ta funkce jedno maximum má, a pokud zjistíme, že má funkce nulovou derivaci jen v jednom bodě, pak to bude ten hledaný.

Funkce f se zderivuje snadno, známe-li potřebná pravidla:

$$f'(\alpha) = -\frac{x}{\cos^2 \alpha} + \cos \alpha.$$

Derivace je tedy rovna nule, právě když $\cos^3 \alpha = x$. Z toho můžeme vyjádřit, že $\cos \alpha = x^{1/3}$, $\sin \alpha = \sqrt{1 - x^{2/3}}$ a nakonec $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{1-x^{2/3}}}{x^{1/3}}$. Vypočítané α můžeme dosadit do parametrizace úsečky a spočítat souřadnici y. Hranici křivky budou tedy tvořit body $[x, y]$, pro které platí

$$y = -x\frac{\sqrt{1 - x^{2/3}}}{x^{1/3}} + \sqrt{1 - x^{2/3}} = \sqrt{1 - x^{2/3}}\left(-x^{2/3} + 1\right) = \left(1 - x^{2/3}\right)^{3/2}.$$

To je zároveň funkční předpis pro nalezenou křivku. Stejný předpis bychom samozřejmě dostali, i kdybychom začali s jinou parametrizací. Kdybychom se s úsečkou pohybovali i do ostatních kvadrantů, vyšlo by to tam, jak jsme už zmínili, symetricky. Výsledná křivka by pak už pochopitelně nebyla funkce. Dala by se však popsat jednoduchým předpisem

$$x^{2/3} + y^{2/3} = 1,$$

který se snadno odvodí z předchozího. Pokud pod označením $x^{2/3}$ myslíme $\sqrt[3]{x^2}$ (aby měl výraz smysl i pro záporná čísla), je vidět, že tento předpis opravdu popisuje v ostatních kvadrantech symetrickou křivku, neboť nezáleží na znaménku x ani y. Této křivce se říká asteroida, protože má tvar hvězdy. Můžeme ji získat i jiným způsobem – je to křivka, kterou opisuje bod na kružnici o poloměru r, která se kutálí po vnitřku kružnice o poloměru $4r$.[1]

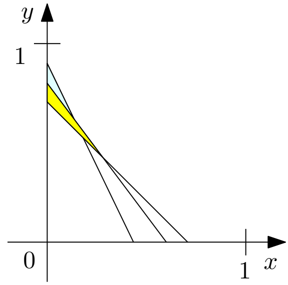
Co se týče obsahu, ten jde z funkčního vyjádření spočítat pomocí určitého integrálu. K výsledku se můžeme dobrat pomocí několika substitucí, využitím speciálních funkcí anebo nějakého vhodného počítačového programu[2]. Tak jako tak bychom se pro obsah vymetené křivky (tj. obsah čtvrtiny asteroidy) měli dobrat následujícího výsledku

$$S = \int_0^1 \left(1 - x^{2/3}\right)^{3/2} = \frac{3\pi}{32} \doteq 0{,}29452431127.$$

Nicméně nepožadovali jsme po vás analytické řešení. Jedna možnost byla využít počítač a spočítat obsah numericky. Způsob, který byste mohli všichni zvládnout, je využití tabulkového procesoru. Touto cestou se vydal Jiří Růžička, který vytvořil excelovský soubor, kde do jednoho sloupečku dal hodnoty koncových bodů úsečky AB na y-ové ose od 1,000 do 0,707 po jedné tisícině. Z těch vždy dopočítal druhý koncový bod na x-ové ose, směrnici dané úsečky a souřadnice průniku s předchozí úsečkou. Tak byl schopen dopočítat obsahy trojúhelníčků vyznačených na obrázku 2. Poslední úsečka má směrnici -1 a dále by to šlo udělat symetrickým způsobem. Obsah těchto trojúhelníčků tedy stačí sečíst, vynásobit

[1] Animaci vzniku asteroidy si prohlédněte na anglické Wikipedii http://en.wikipedia.org/wiki/Astroid.

[2] Podívejte se třeba na http://www.wolframalpha.com/, kam můžete zadat dotaz `integral (1-x^(2/3))^(3/2) dx x=0..1`



Obrázek 2 Ilustrace numerického výpočtu obsahu asteroidy.

dvěma (kvůli symetrii to totiž rovněž bude obsah trojúhelníčků v druhé polovině) a přičíst obsah velkého trojúhelníku, který zbyl.

Totéž lze efektivně vyřešit napsáním krátkého počítačového programu. Uvedený postup je zapsán v následujícím kódu programovacího jazyka Pascal.

```
program asteroida;
const n=100000000;           (*počet dílků*)
      posun=1/n;             (*velikost jednoho dílku*)
var S,y0,k1,k2: double;
     i:longint;
begin
   S:=0;
   y0:=1-posun;
   k2:=-y0/sqrt(1-y0*y0);
   for i:=n-2 downto round(n/sqrt(2)) do begin
      y0:=y0-posun;          (*poč. bod úsečky na y-ové ose*)
      k1:=k2;                (*směrnice předchozí úsečky*)
      k2:=-y0/sqrt(1-y0*y0); (*směrnice aktuální úsečky*)
      S:=S+0.5*posun*posun/(k2-k1); (*přičtení obs. trojúh.*)
   end;
   S:=2*S+0.25;
   writeln(S);
end.
```

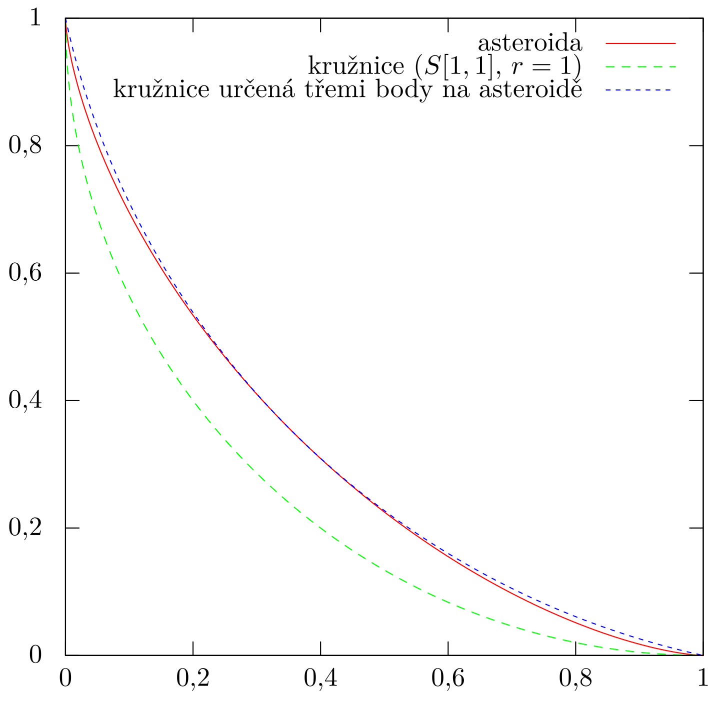
Jirka dospěl k výslednému obsahu 0,294562, což je odpovídá přesnosti na čtyři platné číslice. Rozdělíme-li interval $\langle 0; 1\rangle$ na sto milionů místo tisíce dílků (jako v uvedeném kódu), program vrátí výsledek 0,29452431176. Ten se shoduje v devíti platných číslicích se správným výsledkem. Program na mém počítači běžel jednu vteřinu.

K numerickému řešení se dá přistoupit i jinak. Dá se například zopakovat numerickým způsobem maximalizační úloha, kterou jsme zde popsali analyticky, tj. pro každé x najít vhodnou úsečku procházející $[x, y]$ tak, že y je maximální.

Takto úlohu řešil Ondřej Poláček. Tento algoritmus je však výpočetně náročnější a za stejný čas vypočítá obsah s menší přesností.

Několik řešitelů chybně určilo, že se jedná o část kružnice. Jak jsme ukázali, není to pravda, ale křivka se dá pomocí kružnice celkem přesně aproximovat. Zvolíme-li kružnici tak, aby procházela body $[0, 1]$, $[1, 0]$ a $[\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}]$, velmi se podobá asteroidě. Pozor ale musíme dát na to, že tato kružnice nebude mít střed v bodě $[1, 1]$. Takové řešení zvolil Jan Petr a obsah mu vyšel celkem přesně 0,302. Bohužel neodhalil, že je to pouze aproximace, nikoliv přesné řešení. Porovnání kružnice s asteroidou je na obrázku 3.

Svá tvrzení prosíme vždy řádně zdůvodňujte. Pokud se vám například nedaří dokázat, že vymetená křivka je kružnice, ukažte alespoň, že se velmi podobá kružnici. Popřípadě zmiňte, že je to pouze vaše domněnka. Může se totiž snadno stát, že tvrzení se vám nepodařilo dokázat, protože neplatí.



Obrázek 3 Aproximace asteroidy pomocí kružnice.

Výpočet obsahu měl jistě spoustu dalších řešení, která jsme nezmínili. Škoda, že se mezi vámi například nenašel žádný matematický experimentátor, který by úsečku zanechávající za sebou stopu realizoval třeba pomocí tuhy do verzatilky, křivku nakreslil na milimetrový papír pomocí kolmých pravítek a obsah spočítal čtverečkovou metodou. Zajímavých nápadů ale bylo i tak dost a za ně vám děkujeme.

Dan

1.3 Energetická hodnota cukru

Úkol a *(8 b.)*: *Spočítejte energetický zisk při metabolismu sacharózy a výsledek udejte v* kcal/g.

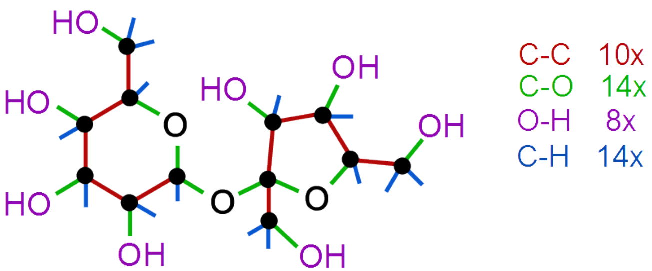
Úkol b *(1 b.)*: *Energetický zisk udaný v* kcal/g *bude u všech sacharidů velmi podobný – pokuste se najít důvod. (Podobná situace je i u tuků a bílkovin.)*

Úkol c *(3 b.)*: *Vezměte si tři libovolné potraviny, u kterých máte na obalu udány hodnoty: energie, cukry, tuky a bílkoviny na* 100 g. *Vezměte takové, kde každá položka bude alespoň u jedné potraviny výrazně zastoupena (jinak bude výsledek velice nepřesný). Sestavte tři rovnice o třech neznámých s pravou stranou a určete tak energetickou hodnotu pro* 1 g *sacharidů, tuků a bílkovin. Výsledek porovnejte s vypočtenou hodnotou.*

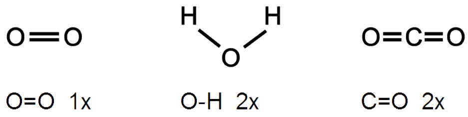
Řešení začneme tím, že si dopočítáme rovnici reakce. Začneme například uhlíkem. Na levé straně máme 12 uhlíků a na pravé straně je jediná molekula s uhlíkem CO_2, tedy stechiometrický koeficient u oxidu uhličitého bude 12. Dále máme nalevo 22 atomů vodíku, a tedy na pravé straně musí být 11 molekul vody. Pokud nyní spočítáme kyslíky, zjistíme, že nám jich 24 chybí na levé straně. Chybějícím reaktantem je tedy kyslík, který získáváme ze vzduchu dýcháním. Přidáme tedy na levou stranu 12 molekul kyslíku O_2.

$$C_{12}H_{22}O_{11} + 12O_2 \longrightarrow 12CO_2 + 11H_2O$$

Dále si určíme počty jednotlivých typů vazeb v sacharóze a dalších molekulách, které se v rovnici vyskytují. Počty vazeb vidíme na obrázcích 4 a 5.



Obrázek 4 Chemická struktura sacharózy s obarvením jednotlivých typů vazeb a jejich počtem.



Obrázek 5 Chemická struktura molekul kyslíku, vody a oxidu uhličitého.

Nyní si spočteme celkovou energii potřebnou na rozbití vazeb v reaktantech:

Vazba	Energie [kcal/mol]
C – C	$10 \cdot 83 = 830$
C – H	$14 \cdot 99 = 1386$
O – H	$8 \cdot 111 = 888$
C – O	$14 \cdot 85{,}5 = 1190$
O = O	$12 \cdot 119 = 1428$
Celkem	5722

Následně spočítáme celkovou energii získanou sloučením všech atomů na výsledné produkty:

Vazba	Energie [kcal/mol]
O – H	$11 \cdot 2 \cdot 111 = 2442$
C = O	$12 \cdot 2 \cdot 192 = 4608$
Celkem	7050

Celkově tedy dostaneme $7050\,\mathrm{kcal} - 5722\,\mathrm{kcal} = 1328\,\mathrm{kcal}$ na každý mol sacharózy, který náš metabolismus zpracuje.

Nakonec ještě převedeme výsledek do jednotek kcal/g. K tomu potřebuje zjistit molární hmotnost sacharózy – kolik gramů váží jeden mol. Tu spočítáme sečtením molárních hmotností jednotlivých atomů. Tyto hodnoty číselně přibližně odpovídají počtu nukleonů v jádře, popřípadě je lze najít v tabulkách. Prvky, ze kterých je složená sacharóza, mají molární hmotnosti $M(\mathrm{H}) = 1\,\mathrm{g/mol}$, $M(\mathrm{C}) = 12\,\mathrm{g/mol}$, $M(\mathrm{O}) = 16\,\mathrm{g/mol}$.

Atom	Molární hmotnost [g/mol]
H	$22 \cdot 1 = 22$
C	$12 \cdot 12 = 144$
O	$11 \cdot 16 = 176$
Sacharóza	342

Sacharóza tedy má molární hmotnost $342\,\mathrm{g/mol}$. Konečný výsledek potom je $1328\,\mathrm{kcal/mol} \cdot 342\,\mathrm{mol/g} \doteq 3{,}9\,\mathrm{kcal/g}$.

Důvodem, proč mají všechny sacharidy velmi podobnou hodnotu energetického výtěžku v kcal/g je, že mají obdobné chemické složení. Skládají se z podobných základních jednotek, a tedy jak původní vazby, tak výsledné produkty jsou stejné a v podobných poměrech.

Pokud například uděláme dlouhý řetězec glukózy, budeme mít sice hodně energie na mol (jeden mol velkých molekul má v sobě hodně atomů, které převedeme na stabilní produkty se ziskem energie), ale pokud výsledek opět přepočteme na gram, dostaneme stejné číslo. (Velká molekula má kromě velkého počtu atomů pochopitelně úměrně velkou hmotnost.)

Vezmeme si tři potraviny a zjistíme příslušné hodnoty ve 100 g výrobku:

	Müsli bar	Mozarella Light	Nutoka
Energie	363 kcal	165 kcal	559 kcal
Sacharidy	64 g	1,5 g	51,8 g
Tuky	9,7 g	8,5 g	35,7 g
Bílkoviny	4,7 g	20,5 g	5,9 g

Hodnoty celkové energie a hmotnosti složek budou tvořit koeficienty v soustavě lineárních rovnic pro výživové hodnoty složek ve tvaru

$$m_\mathrm{s}E_\mathrm{s} + m_\mathrm{t}E_\mathrm{t} + m_\mathrm{b}E_\mathrm{b} = E,$$

kde m s patřičným indexem je hmotnost složky, E s patřičným indexem je energie složky vztažená na jednotku hmotnosti a E bez indexu je celková energie.

Řešení naší konkrétní soustavy je

$$E_\mathrm{s} = 3{,}98473\,\mathrm{kcal/g}, \quad E_\mathrm{t} = 9{,}22676\,\mathrm{kcal/g}, \quad E_\mathrm{b} = 3{,}93148\,\mathrm{kcal/g}.$$

Ověřili jsme tedy, že energetická hodnota sacharidů je skutečně kolem čtyř kilokalorií na gram.

Za zmínku ještě stojí, že výživové hodnoty na obalech potravin se tímto způsobem nepočítají. Energetickou hodnotu jednotlivých látek stanovuje Vyhláška o označování výživové hodnoty potravin. Ta udává, že výživová hodnota sacharidů a bílkovin je 4 kcal/g a výživová hodnota tuků je 9 kcal/g. Přirozeně stanovuje i energetickou hodnotu dalších živin jako alkoholu, organických kyselin nebo vlákniny.

Mája

1.4 Topinkovač

Nešikovný fyzik Dan rozbil topinkovač – shořelo mu v něm asi půl metru z celkových čtyř a půl metru odporového drátu. Dan změřil, že drát má průřez obdélníkového tvaru o rozměrech 0,9 mm × 0,1 mm a že jeho odpor je přibližně 16 Ω/m. Pro zajímavost se podíval do tabulek, z jaké slitiny byl drát vyroben.

Úkol a *(1 b.)*: *Odporové dráty se nejčastěji vyrábějí z konstantanu, kanthalu, manganinu nebo isotanu. Ze které slitiny byl nejspíše tento drát?*

Dan koupil drát, který měl odpor $18\,\Omega/\mathrm{m}$ a byl kruhového průřezu o průměru 0,18 mm.

Úkol b *(1 b.)*: *Z jakého materiálu byl tento drát?*

Úkol c *(2 b.)*: *Proč Dan tušil, že se výměna nepovede? Proč je nutné použít drát nejen srovnatelného odporu, ale i srovnatelné velikosti? Je podstatnější srovnatelný objem, nebo plocha drátu?*

Inu, Dan se nevzdal a řekl si, že koupí drát ze stejné slitiny, jako je v topinkovači. Našel však pouze drát o odporu $20{,}81\,\Omega/\mathrm{m}$ a průřezu $0{,}7\,\mathrm{mm} \times 0{,}1\,\mathrm{mm}$.

Úkol d *(4 b.)*: *Povede se výměna tentokrát? Rozžhaví se oba dráty na přibližně stejnou teplotu? Jak se změní výkon topinkovače?*

Úkol e *(3 b.)*: *Co kdyby nebyl zrovna k sehnání žádný jiný než konstantanový drát? Šlo by nějak zařídit, aby topinkovač správně fungoval, přibližně rovnoměrně ohříval a zároveň měl stejný výkon jako předtím? Předpokládejte, že se dá pořídit konstantanový drát kruhového průřezu libovolné tloušťky.*

Dan zjistil, že použité odporové dráty mají velice malý teplotní součinitel odporu – přibližně $50 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{K}^{-1}$. Rozhodl se předpokládat, že dráty mají v provozu stále teplotu okolo 800 °C.

Úkol f *(1 b.)*: *Jaké relativní chyby se dopustíme, bude-li se lišit teplota drátu o* 200 °C*?*

První dva úkoly bylo potřeba vyřešit výpočtem patřičné materiálové konstanty – měrného elektrického odporu ϱ. Pomocí něj lze spočítat odpor vodiče o délce l a ploše průřezu $S_\varnothing$ jako

$$R = \frac{l\varrho}{S_\varnothing}.$$

V zadání nebyl přímo odpor R, ale odpor vztažený na jednotku délky R/l (řešitel Ondřej Poláček tuto veličinu nazval *odpornost*). Pokud nás to nezmátlo, mohli jsme tak snadno dopočítat měrný elektrický odpor jako

$$\varrho = \frac{R}{l} S_\varnothing.$$

U prvního drátu byl výsledek $\varrho = 1{,}44\,\mu\Omega\,\mathrm{m}$, což odpovídá odporu kanthalu, a u druhého $\varrho = 0{,}46\,\mu\Omega\,\mathrm{m}$, což odpovídá dobře odporu konstantanu, manganinu i izotanu, proto jsme uznávali všechny tyto možnosti. Vězte ale, že Dan koupil konstantanový drát.

Důvod Danova špatného tušení vyplyne snadno z výpočtu v následujícím úkolu. Teplota, na kterou se drát ohřeje, závisí na dvou faktorech – jak rychle drát získává teplo prostřednictvím elektrické energie (v závislosti na teplotě) a jak rychle drát teplo ztrácí. První faktor závisí na odporu drátu a druhý přirozeně na ploše povrchu. Ať už by drát ztrácel teplo zářením, nebo prouděním okolního vzduchu, vždy jsou tyto ztráty větší, když má drát větší povrch. Uvažovat ztráty tepla je důležité, jinak by teplota drátu mohla růst do nekonečna.

Dále Dan nemusel vědět, že mají dráty nízký teplotní součinitel odporu. Kdyby byl tento součinitel větší, pak by docházelo k tomu, že užší drát (který má navíc o něco větší odpor) se rychleji ohřívá (protože má menší objem, tedy i tepelnou kapacitu), tím pádem rychleji roste jeho odpor, zvětšuje se na něm napětí a o to rychleji se ohřívá.

Přestože většina z vás zvládla vypočítat teplotu, na kterou se drát zahřeje, a ze vzorce je vidět, že při daném odporu drátu tato teplota nezávisí na objemu, ale na povrchu, odpovídali jste často naopak. Při menším objemu má drát pochopitelně menší tepelnou kapacitu, a snadněji se tedy ohřívá. Rovněž to však znamená, že se i snadněji ochlazuje, a tyto vlivy objemu se v rovnováze vzájemně vykompenzují. Objem drátu tedy ovlivní pouze rychlost, jakou se do rovnovážné teploty dostaneme, nikoliv jak vysoká tato teplota bude. Do rovnovážného stavu se dostaneme celkem rychle tak jako tak – dráty topinkovače se v mžiku rozpálí do ruda a pak jejich teplota už příliš neroste – příliš tedy nezáleží na tom, jestli bude tento mžik delší nebo kratší. Spíše záleží na teplotě, ke které se dostaneme.

Nyní se podívejme na samotný výpočet. Myšlenku jsme naznačili už v textu k zadání. Teplota drátu se ustálí na takové hodnotě, že výkon elektrických sil $P = UI = U^2/R$ je roven vyzářenému výkonu $P = I_\mathrm{e}S = \sigma T^4 S$ (I je proud a I_e intenzita záření). Z toho je už pouze potřeba vyjádřit onu teplotu

$$T = \sqrt[4]{\frac{U^2}{\sigma R S}}.$$

Do vztahu je potřeba za S dosadit plochu průřezu drátu, za U napětí na příslušné části obvodu a za R odpor drátu patřičné délky při provozní teplotě. Na konci textu jsme doporučili použít teplotu 800 °C a zeptali se, jaké chyby se dopustíme, bude-li skutečná teplota o 200 °C jiná.

Změna odporu při změně teploty se vypočítá jako

$$\Delta R = R_0 \alpha \Delta T,$$

kde R_0 je původní odpor, ΔT změna teploty a α teplotní součninitel odporu. Bude-li tedy pracovní teplota o 800 stupňů vyšší než ta, při které byl měřen odpor v zadání (což je bůh ví jaká, rozdíl dvaceti stupňů nechť veme čert), změní se odpor drátu na $R = R_0(1 + \alpha\Delta T) = 1{,}04 R_0$. Bude-li ve skutečnosti teplota ještě o dvě stě stupňů jiná, dopustíme se ve výpočtu odporu relativní chyby $\delta = \Delta R/R \doteq \alpha\Delta T = 0{,}01 = 1\,\%$. Relativní chyba ve výpočtu absolutní teploty drátu bude vzhledem ke čtvrté odmocnině čtvrtinová.

Nejprve tedy spočítejme, na jakou teplotu se rozžhavil drát v topinkovači, než se rozbil. Dosadíme tedy hodnoty $R = 4{,}5 \cdot 1{,}04 \cdot 16 = 74{,}88\,\Omega$, $S = 4{,}5 \cdot 2 \cdot (0{,}0009 + 0{,}0001) = 0{,}009\,\mathrm{m}^2$ a $U = 230\,\mathrm{V}$. Výsledek bude $T = 1085\,\mathrm{K}$.

Nyní se podívejme na případ s konstantanovým drátem. Odpor vyměněné části bude $R_1 = 0{,}5 \cdot 1{,}04 \cdot 18 = 9{,}36\,\Omega$, odpor zbytku $R_2 = 4 \cdot 1{,}04 \cdot 16 = 66{,}56\,\Omega$.

V tomto poměru se zároveň rozloží napětí 230 V na $U_1 = 28{,}4\,\mathrm{V}$ a $U_2 = 201{,}6\,\mathrm{V}$. Snadno se dopočítají i povrchy drátů a získá se výsledek pro teploty obou částí $T_1 = 1522\,\mathrm{K}$ a $T_2 = 1077\,\mathrm{K}$. Není tedy divu, že se konstantanový drát přepálil.

Nakonec uvažme případ s kanthalovým drátem. Dosazované hodnoty vyjdou $R_1 = 10{,}82\,\Omega$, $R_2 = 66{,}56\,\Omega$, $U_1 = 32{,}16\,\mathrm{V}$, $R_2 = 197{,}8\,\mathrm{V}$, $S_1 = 0{,}0008\,\mathrm{m}^2$, $S_2 = 0{,}008\,\mathrm{m}^2$. Výsledek je tedy $T_1 = 1204\,\mathrm{K}$ a $T_2 = 1066\,\mathrm{K}$.

K porovnání výkonů už stačí pouze dosadit do vztahu $P = U^2/R$ – topinkovač v původním stavu měl výkon asi 706 W, nyní má výkon 684 W.

Nemáme-li jinou možnost než použít konstantanový drát, zato máte k dispozici libovolný průměr drátu, musíme slevit z požadavku nahradit půlmetrový drát půlmetrovým a připustit libovolnou délku. Pak zde bude dostatek volných proměnných (délka a průměr drátu), aby se splnily požadavky stejného výkonu a stejné teploty. Požadavek stejného výkonu znamená, že požadujeme stejný celkový odpor drátu. Máme-li tento stejný celkový odpor zaručený, je požadavek stejné teploty zároveň požadavkem na stejný celkový povrch drátu (ostatní proměnné ve vztahu pro výpočet teploty už jsou fixované). Dohromady to znamená soustavu dvou rovnic o dvou neznámých. Označíme-li $R_0 = 8\,\Omega$ odpor původní části drátu a $S_0 = 0{,}001\,\mathrm{m}^2$ povrch původní části drátu, pak délku l a průměr průřezu d nového konstantanového drátu určuje následující soustava

$$\frac{l\varrho}{\pi d^2/4} = R_0, \quad l\pi d = S_0.$$

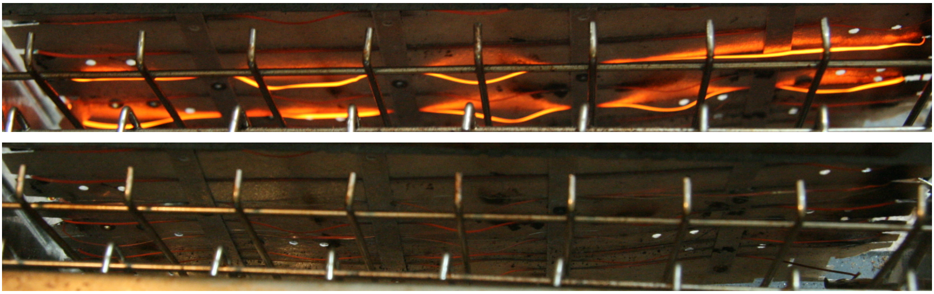
Řešením soustavy je

$$d = \sqrt[3]{\frac{4S_0\varrho}{\pi^2 R_0}} = 0{,}29\,\mathrm{mm}, \quad l = \sqrt[3]{\frac{R_0 S_0^2}{4\pi\varrho}} = 1{,}1\,\mathrm{m}.$$

Zdá se tedy, že by stačilo použít drát dvojnásobné délky a polovičního odporu.

Protože byl příběh inspirován skutečnou událostí, můžeme porovnat výpočty se skutečností. Po druhé výměně se skutečně vyměněný drát rozžhavil více než původní a podle barvy můžeme usoudit, že rozdíl teplot skutečně odpovídal. Nicméně skutečné teploty byly o poznání nižší. To se Dan pokusil napravit podobným trikem, jako byl v jednom z úkolů. Provedl to ale tak, že k vyměněnému drátu připojil paralelně ještě jeden o odporu $53{,}1\,\Omega/\mathrm{m}$. Dosáhl tak nakonec opravdu vyrovnání teplot, ale výsledná teplota byla stejně o poznání nižší – jak oproti výpočtu, tak oproti původnímu stavu. Rozdíl bude patrně dán příliš velkým přechodovým odporem u spojů odporových drátů. Nakonec můžete posoudit výsledek sami z fotografií.

Dan



Obrázek 6 Rozžhavený odporový drát v topinkovači po výměně (dole s paralelně zapojeným drátem navíc).