Zadání úloh 1. série

1.1 Čtyřrozměrné bytosti

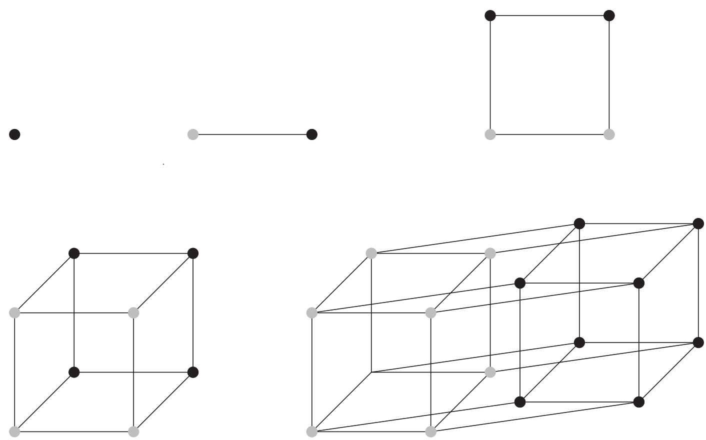
Ve vesmíru o čtyřech prostorových dimenzích žije nepříliš vyspělá civilizace čtyřrozměrných bytostí, které k zápisu informací používají papír ve tvaru kvádru.

Úkol a *(3 b.)*: *Pomozte jim najít takový poměr délek hran papíru, aby platilo, že když jej přeloží napůl, získají kvádr se stejným poměrem hran. (Sami se zamyslete nad tím, co znamená překládat takový papír ve čtyřech dimenzích.)*

Úkol b *(2 b.)*: *Definujme papír formátu A0 ve čtyřech dimenzích jako kvádr o objemu $1\,\zeta^3$ (ζ je jednotka délky) s poměry hran z předchozí části úlohy. Formát A1 pak získáme půlením nejdelší hrany papíru A0, A2 rozpůlením A1 atd. Najděte obecný vztah pro délky hran papíru o formátu AN, kde N je přirozené číslo.*

Svět čtyřrozměrných bytostí si my, zvyklí na prostor trojrozměrný, představíme jen těžko. Zamysleme se nejprve, jak se konstruuje n-rozměrná hyperkrychle. Hyperkrychle pro nulovou dimenzi je bod. Vezmeme-li pomyslně bod do rukou a roztáhneme v jednom směru, vytvoříme úsečku – hyperkrychli dimenze jedna. Vezmeme-li teď za úsečku a roztáhneme, dostaneme čtverec – hyperkrychli dimenze dva. Analogickým postupem dostaneme ze čtverce krychli a z krychle teserakt, tj. 4D-krychli.

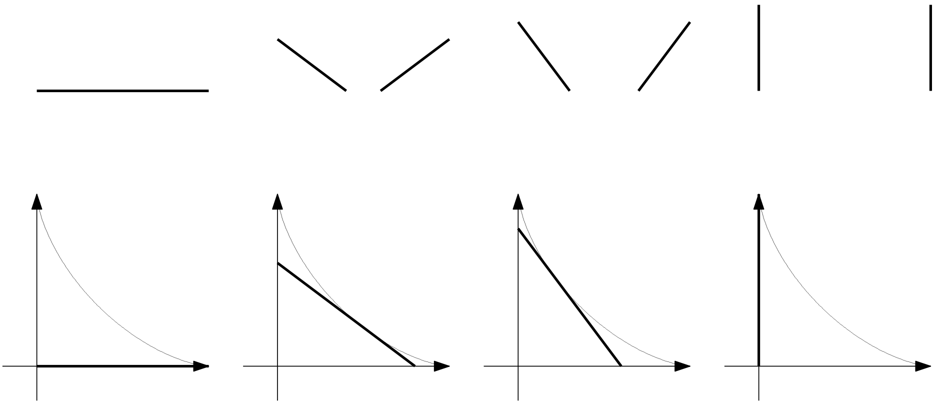
Chceme-li zkonstruovat opravdovou n-rozměrnou hyperkrychli, potřebujeme na to n-rozměrný prostor a v něm roztahovat podle předchozího postupu vždy kolmo na všechny hrany. Máme-li však k dispozici pouze dvourozměrný papír, nezbude nám než po konstrukci čtverce rozšiřovat v již nekolmých směrech. Stejně jako to děláme u běžné krychle, můžeme pokračovat i u té čtyřdimenzionální. Získáme tak její projekci do roviny, jaká je vidět na obrázku 1.



Obrázek 1 Ilustrace hyperkrychlí.

1.2 Vymetená křivka

V Praze – a jistě i v jiných městech – je velice rozšířený typ nízkopodlažních autobusů, jejichž dvoudílné dveře se otevírají dovnitř. Neotevírají se ale jako běžné dveře, protože by tak bránily cestujícím. Při otevírání se pohybuje jejich vnitřní konec rovnoběžně s krajem vozidla, zatímco druhý konec se pohybuje po kolmé ose. Situaci znázorňuje obrázek 2. Dveře mají na spodním okraji smeták a ve špinavém autobusu vymetají oblast, jejíž hranicí je zajímavá křivka. Nás bude zajímat, jak vypadá.



Obrázek 2 Ilustrace pohybu dveří, resp. úsečky.

Úkol *(5 b.)*: *Mějme v kartézské soustavě úsečku, jejíž jeden konec je upevněn k ose x a druhý k ose y. Zjistěte tvar stopy takové úsečky při pohybu v soustavě. Hledáme tedy množinu bodů ležících na libovolné úsečce AB splňující $|AB| = 1$, $A \in x$ a $B \in y$. Zkuste co nejpřesněji určit její obsah.*

Starší řešitelé jistě dokáží určit přesně funkční předpis hranice dané množiny, můžete ale také zkusit tvar zjistit numericky pomocí počítače, nebo si naopak představit, že takové vymoženosti nemáme, a přesto potřebujeme tvar zjistit a spočítat obsah.

1.3 Energetická hodnota cukru

Základními zdroji energie pro lidské tělo jsou sacharidy, tuky a bílkoviny. Možná vás někdy napadla otázka, jak souvisí množství získané energie s molekulární strukturou těchto látek. Možná vás něco takového nikdy nenapadlo. Každopádně přesně o zodpovězení této otázky půjde v naší úloze.

Pokusíme se spočítat množství energie, které naše tělo získá konzumací 1 g cukru. Tuto hodnotu určíme přímo z molekulární struktury, odpovídající chemické reakce a energií vazeb mezi atomy.

Katedra jaderné chemie

Pochopení chemických procesů kolem nás je základem bezpečného využívání ionizujícího záření. Prací s ionizujícím zářením v oblasti chemie se zabývá katedra jaderné chemie.

Radioaktivní záření je přirozenou součástí životního prostředí. Jednak pochází z vesmíru, jednak se některé horniny naší planety přirozeně přeměňují na horniny jiné, přičemž vyzařují ionizující záření.

Lidé na katedře přemýšlejí, jak bezpečně uložit vyhořelé palivo jaderných elektráren, ale také jak ho dále využít či zda neexistuje palivo lepší. Chemici jsou ale také hraví a zvídaví, a tak studují prvky na konci periodické tabulky – jaké mají vlastnosti, jak je od sebe oddělit, jak je detekovat v životním prostředí či jak by lidstvu mohly prospět.

Ionizující záření je dnes již nedílnou součástí moderní medicíny. Nejen zobrazovací přístroje, ale především různé metody léčby mnoha typů rakoviny jsou závislé na radionuklidech. Další skupina chemiků u nás tedy studuje látky podobné látkám tělu vlastním a zabývá se otázkou, jak připravit nová radiofarmaka.

Radioaktivní záření lze rovněž využít v technice. Například v laboratoři přípravy a charakterizace práškových materiálů se pomocí ionizujícího nebo UV záření připravují anorganické nanoscintilátory s charakteristickými vlastnostmi.

Kovalentní vazby

První, s čím se musíme seznámit, jsou kovalentní vazby. Jedná se obecně o nejsilnější vazby, což znamená, že při jejich vzniku/zániku dochází k největším energetickým změnám. Ostatní druhy vazeb (např. vodíkové můstky) v této úloze nebudeme uvažovat.

Kovalentní vazby mají svůj původ v kvantové mechanice a zde se nebudeme pokoušet o jeho vysvětlení. Důležité pro nás bude, že při vzniku těchto vazeb se uvolňuje energie a naopak na jejich rozbití musí být energie dodána. Dva atomy spojené kovalentní vazbou si můžeme představit jako dva magnety. Pokud se magnety přiblíží (opačnými póly) k sobě, přitáhnou se a uvolní se energie – především v podobě tepla a zvuku. Chceme-li magnety dostat od sebe, musíme opět energii dodat (vynaložit určité úsilí). Tuto energii v případě chemických vazeb nazýváme *vazebná energie*.

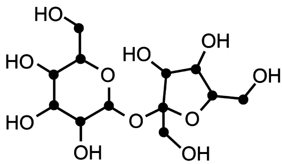
Vazebná energie závisí na tom, mezi jakými atomy je vazba realizována, a případně na typu vazby – dvojná vazba má větší energii než jednoduchá a podobně. Zde jsou energie vazeb, které budeme v naší úloze potřebovat ($1\,\mathrm{kcal} \simeq 4200\,\mathrm{J}$):

Sacharóza a reakce jejího spalování

Jako cukr, kterým se budeme zabývat, si vezmeme ten asi nejběžnější v našem jídelníčku – sacharózu. Její chemická struktura je na obrázku 3.

Vazba	Energie [kcal/mol]	Popis
C – C	83	Jednoduchá vazba uhlík–uhlík
C – H	99	Jednoduchá vazba uhlík–vodík
O – H	111	Jednoduchá vazba kyslík–vodík
C – O	86	Jednoduchá vazba uhlík–kyslík
C = O	192	Dvojná vazba uhlík–kyslík
O = O	119	Dvojná vazba kyslík–kyslík

Tabulka 1 Vazebné energie



Obrázek 3 Chemická struktura sacharózy. Černé puntíky znázorňují atomy uhlíku, jednoduché čáry jsou jednoduché vazby mezi atomy, nejsou vyznačeny vodíky vázané na uhlíky (ty lze dopočítat, neboť víme, že uhlík je čtyřvazný).

V lidském organismu se při aerobním metabolismu sacharóza postupně zpracuje až na oxid uhličitý a vodu. Zcela bezohledně zanedbáme nesmírně složité biologické procesy, které za pomoci mnoha enzymů sacharózu zpracovávají a získávají z ní energii. Jediné, co vezmeme v úvahu, je výchozí stav se sacharózou a výsledný stav s oxidem uhličitým a vodou. Zde je základ rovnice, kterou si jistě bez problémů dopočítáte sami.

$$C_{12}H_{22}O_{11} + \quad ??? \quad \longrightarrow \quad CO_2 + \quad H_2O$$

V rovnici je vynecháno místo na ještě jeden reaktant. Určitě přijdete na to, jakou další molekulu lidské tělo potřebuje k efektivnímu získávání energie z cukrů. (Navíc potřeba této molekuly jasně vyplyne při dopočítávání rovnice.) Strukturu všech potřebných molekul znáte, případně si ji zjistíte. (Uhlík má čtyři vazby, kyslík dvě a vodík jednu, takže někde budou potřeba vazby dvojné.)

Princip určení energetického zisku je jednoduchý. Představíme si, že je třeba nejprve investovat určité množství energie, abychom reaktanty rozbili na jednotlivé atomy. Poté je spojíme do produktů a tím opět vazebnou energii získáme. (Pochopitelně doufáme, že jí získáme více, než jsme museli na začátku investovat.) V reálu samozřejmě proces probíhá jinak – nedochází k úplnému rozbití na atomy a proces prochází přes velké množství meziproduktů. To ale pro náš výpočet není nijak důležité. Takzvaný *Hessův zákon* nám totiž říká, že výsledná změna energie závisí pouze na počátečních reaktantech a výsledných produktech bez ohledu na skutečnou cestu, kterou se proces ubíral.

Molární hmotnost

Tato část se zabývá převody mezi *gramy* a *moly*. Pokud vám tyto převody nedělají problémy, klidně ji přeskočte.

Chemické reakce probíhají na úrovni molekul a je zde důležité, v jakém poměru jsou počty jednotlivých typů těchto molekul. Množství molekul tedy uvádíme jejich počtem, respektive často pomocí jednotky *mol*. Pokud však pracujeme s potravinami, nejspíše nebudeme k určení množství počítat molekuly. Namísto toho budeme potraviny (například naši sacharózu) vážit a výsledek udávat v gramech. Abychom mohli spojit poznatky získané studiem chemické struktury sacharózy s údajem na obalu od sušenek, potřebujeme nějaké převodní vztahy.

Jeden mol je podle definice: *počet částic ve* 12 g *uhlíku* ^{12}C. To může vypadat poněkud zvláštně, ale jde jen o to, že uhlík ^{12}C obsahuje 6 protonů a 6 neutronů, tedy právě 12 nukleonů (těžkých částic v jádře). Jelikož hmotnost elektronů je oproti nukleonům zanedbatelná, definice molu vlastně říká, že je to takové množství nukleonů, které váží 1 g. (Jen se v definici použije materiál, se kterým se daleko lépe pracuje.)

Pokud tedy chceme zjistit, kolik gramů váží 1 mol dané molekuly, stačí určit celkový počet protonů a neutronů v jedné molekule a za každý proton a neutron započítat 1 g. Například 1 mol vodíku H_2 váží 2 g – každý z vodíků v molekule má jeden proton a žádný neutron.

Tento způsob určení hmotnosti molekuly je přibližný, ale nám postačí. Alternativně je možné použít relativní atomovou hmotnost, kterou lze najít v tabulkách.

Úkol a *(8 b.)*: *Spočítejte energetický zisk při metabolismu sacharózy a výsledek udejte v* kcal/g.

Úkol b *(1 b.)*: *Energetický zisk udaný v* kcal/g *bude u všech sacharidů velmi podobný – pokuste se najít důvod. (Podobná situace je i u tuků a bílkovin.)*

Úkol c *(3 b.)*: *Vezměte si tři libovolné potraviny, u kterých máte na obalu udány hodnoty: energie, cukry, tuky a bílkoviny na* 100 g. *Vezměte takové, kde každá položka bude alespoň u jedné potraviny výrazně zastoupena (jinak bude výsledek velice nepřesný). Sestavte tři rovnice o třech neznámých s pravou stranou a určete tak energetickou hodnotu pro* 1 g *sacharidů, tuků a bílkovin. Výsledek porovnejte s vypočtenou hodnotou.*

1.4 Topinkovač

Nešikovný fyzik Dan rozbil topinkovač – shořelo mu v něm asi půl metru z celkových čtyř a půl metru odporového drátu. Dan změřil, že drát má průřez obdélníkového tvaru o rozměrech 0,9 mm × 0,1 mm a že jeho odpor je přibližně 16 Ω/m. Pro zajímavost se podíval do tabulek, z jaké slitiny byl drát vyroben.

Katedra fyziky

V této úloze využijete některé základní poznatky o elektřině a termice. Výukou základního kurzu fyziky i výukou a výzkumem v oblasti moderní fyziky se u nás zabývá jedna z největších kateder – katedra fyziky.

Je zde možné studovat fyziku plazmatu a pomoci svým výzkumem světu zvládnout získávání energie z termojaderné fúze. Jinou možností je zabývat se fundamentálními poznatky z oboru jaderné a částicové fyziky, ať už jako experimentální nebo teoretický fyzik. Teoretičtí fyzikové se zde dále zabývají například kvantovou informací, kvantovou mechanikou, symetriemi diferenciálních rovnic nebo aplikacemi statistické fyziky v biologii či ekonomii.

Nakonec katedra zajišťuje výuku bakalářského studijního programu Fyzikální technika, jenž je zaměřen na praktickou přípravu odborných pracovníků na rozhraní fyziky a techniky.

V oblasti výzkumu spolupracuje katedra fyziky s předními českými i světovými výzkumnými centry, jako je Akademie věd ČR, CERN, Fermilab nebo GSI.

Úkol a *(1 b.)*: *Odporové dráty se nejčastěji vyrábějí z konstantanu, kanthalu, manganinu nebo isotanu. Ze které slitiny byl nejspíše tento drát?*

Ačkoliv Danovi rodiče za bezpečnější a rychlejší považovali koupi nového topinkovače, Dan se drát rozhodl vyměnit a řekl si, že je potřeba koupit takový, aby co nejlépe odpovídal jeho odpor. Nejpodobnější, který našel, měl odpor $18\,\Omega/\mathrm{m}$ a byl kruhového průřezu o průměru $0{,}18\,\mathrm{mm}$.

Úkol b *(1 b.)*: *Z jakého materiálu byl tento drát?*

Cestou domů si uvědomil, že udělal chybu – drát je příliš tenký. Přesto se pokusil zasaženou část vyměnit. Po zapnutí topinkovače se nažhavila pouze vyměněná část, která se po chvíli přepálila.

Úkol c *(2 b.)*: *Proč Dan tušil, že se výměna nepovede? Proč je nutné použít drát nejen srovnatelného odporu, ale i srovnatelné velikosti? Je podstatnější srovnatelný objem, nebo plocha drátu?*

Inu, Dan se nevzdal a řekl si, že koupí drát ze stejné slitiny, jako je v topinkovači. Našel však pouze drát o odporu $20{,}81\,\Omega/\mathrm{m}$ a průřezu $0{,}7\,\mathrm{mm} \times 0{,}1\,\mathrm{mm}$. Aby ho opět nekupoval zbytečně, rozhodl se, že si jeho vhodnost ověří výpočtem.

Dan se podíval do své učebnice fyziky a hledal, co by se dalo využít k výpočtu teploty drátu, jímž prochází proud. Uvažoval pro jednoduchost, že dráty ztrácejí energii pouze vyzařováním a že i když není drát ani černé barvy, vyzařuje energii stejně jako absolutně černé těleso. I když měřil Dan celkem nepřesně a zanedbání nejsou zanedbatelná, vyšly mu celkem rozumné výsledky.

Našel si, že vyzařování černého tělesa je popsané Stefanovým–Boltzmannovým zákonem

$$I = \sigma T^4,$$

který nám udává závislost intenzity záření I na teplotě T. Vystupuje v něm tzv. Stefanova–Boltzmannova konstanta $\sigma = 5{,}6704 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{W\,m^{-2}\,K^{-4}}$. Intenzita záření udává zářivý tok (výkon) vztažený na jednotku plochy. Dopočítání teploty už je snadné snadno na základě zákona zachování energie, protože Dan dobře ví, jak spočítat elektrický výkon.

Úkol d *(4 b.)*: *Povede se výměna tentokrát? Rozžhaví se oba dráty na přibližně stejnou teplotu? Jak se změní výkon topinkovače?*

Úkol e *(3 b.)*: *Co kdyby nebyl zrovna k sehnání žádný jiný než konstantanový drát? Šlo by nějak zařídit, aby topinkovač správně fungoval, přibližně rovnoměrně ohříval a zároveň měl stejný výkon jako předtím? Předpokládejte, že se dá pořídit konstantanový drát kruhového průřezu libovolné tloušťky.*

Dan zjistil, že použité odporové dráty mají velice malý teplotní součinitel odporu – přibližně $50 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{K^{-1}}$. Když se snažil vzít změnu odporu v úvahu ve svých výpočtech, vyšla mu rovnice, kterou neuměl vyřešit. Proto se rozhodl předpokládat, že dráty mají v provozu stále teplotu okolo $800\,^{\circ}\mathrm{C}$.

Úkol f *(1 b.)*: *Jaké relativní chyby se dopustíme, bude-li se lišit teplota drátu o* $200\,^{\circ}\mathrm{C}$*?*