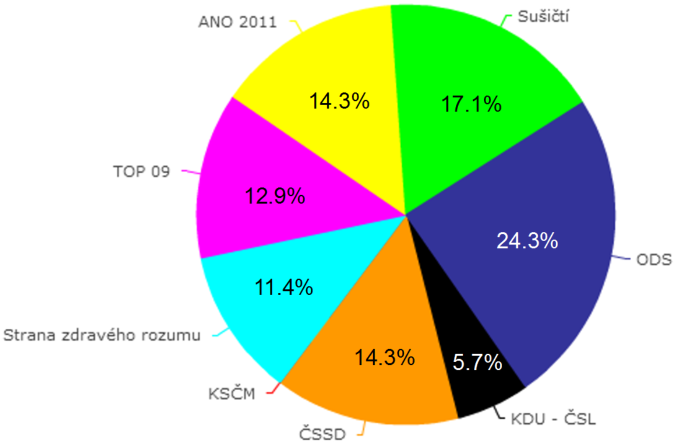
Zadání úloh 2. série

2.1 Předvolební anketa

Na internetu jste narazili na předvolební anketu ke komunálním volbám. Její výsledek, znázorněný na obrázku 1, je poměrně překvapivý. Navíc jste si všimli, že dvě strany mají na desetinu procenta stejný počet hlasů. Jedná se o on-line anketu, takže v ním mohlo zatím hlasovat velmi málo lidí, a výsledek tedy nemusí být příliš vypovídající. Bohužel počet hlasujících není na webové stránce uveden.

Úkol *(5 b.)*: *Jaký počet lidí v anketě nejspíš hlasoval?*[1]



Obrázek 1 Počet hlasů v anketě získaných jednotlivými uskupeními. (Procentuální podíly jsou pochopitelně zaokrouhlené.)

Mája

2.2 Voda z kohoutku

Úkol *(5 b)*: *Jaký tvar má proud vody vytékající z kouhoutku? Udělejte takové zjednodušující předpoklady, aby se vám podařilo úlohu vyřešit, ale aby výsledek přibližně odpovídal realitě. Pokud se vám to nepodaří, můžete zkusit tvar zjistit experimentálně. Zdůvodněte, proč vypadá skutečnost přece jen trochu jinak než vaše řešení.*

Kuba

[1] Celá úloha je bez jakékoli úpravy založena na reálné situaci :-).

2.3 Pohyb částice v elektromagnetickém poli

Lorentzova síla určuje silové působení elektrického a magnetického pole na částici a její rovnice je proto jednou z nejdůležitějších pro studium pohybu částic v elektromagnetickém (EM) poli. Obě složky – elektrická a magnetická – působí nezávisle a jejich účinky se sčítají. Účinky elektrického pole v daném bodě popisuje vektorová veličina *intenzita elektrického pole* $\vec{E}$ a účinky magnetického pole popisuje *magnetická indukce* $\vec{B}$.

Elektrické pole působí na nabitou částici v nějakém bodě silou směřující stejným směrem jako intenzita elektrického pole v tomto bodě. Velikost této síly je určena jednoduchým vztahem $F_E = qE$, kde q je náboj částice a E je je intenzita elektrického pole. Je-li náboj q záporný, směřuje síla $\vec{F}$ opačným směrem. Dohromady je tento vztah možné vyjádřit vektorovým zápisem

$$\vec{F}_E = q\vec{E}.$$

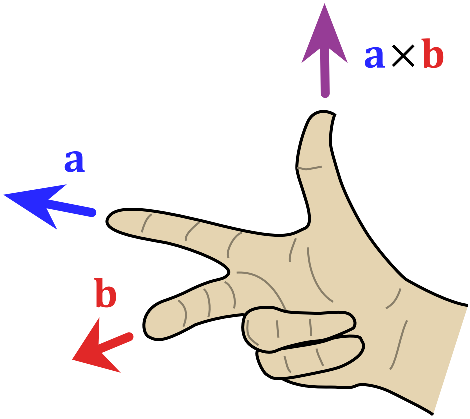
Síla působící na částici v magnetickém poli závisí nejen na náboji q částice, ale i na její rychlosti. V jednoduchém případě, kdy jsou vektory magnetického pole a rychlosti navzájem kolmé, se dá velikost síly určit jako $F_B = qvB$, kde q je náboj, v velikost rychlosti a B velikost magnetické indukce. Směr magnetické síly se vždy určuje podle pravidla pravé ruky. Směr určuje vztyčený palec pravé ruky, jestliže vztyčený ukazováček ukazuje směr rychosti a pokrčený prostředníček směr magnetické indukce (jako na obrázku 2).

V případě, kdy rychlost a magnetická indukce kolmé nejsou, se dá vektor rychlosti rozložit na součet rychlosti ve směru kolmém k magnetickému poli a ve směru rovnoběžném s polem. Magnetická síla pak bude působit na částici tak, jako by částice měla pouze tu kolmou složku rychlosti. Protože i výsledná síla bude kolmá k magnetickému poli, nebude rychlost částice v rovnoběžném směru ovlivněna.

Celkově se toto působení dá zjednodušeně napsat pomocí tzv. vektorového součinu. Vektorový součin je součin dvou vektorů v trojrozměrném prostoru. Je roven vektoru, který je na původní vektory kolmý, jeho velikost je rovna obsahu rovnoběžníku, jehož dvě strany tyto dva vektory tvoří, a jeho směr je určen stejným pravidlem pravé ruky (viz obrázek 2). Pokud budeme mít vektory $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ a $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, výsledkem vektorového součinu $\vec{a} \times \vec{b}$ bude vektor $\vec{c}$, jehož složky budou vypadat následovně:[2]

$$c_1 = a_2 b_3 - a_3 b_2, \quad c_2 = a_3 b_1 - a_1 b_3, \quad c_3 = a_1 b_2 - a_2 b_1.$$

[2] V souřadnicích není nijak zakódováno, jak vypadá pravá a levá ruka. Zde je tedy nutné navíc předpokládat, že i souřadná soustava je pravotočivá, tj. směry souřadných os x, y a z také splňují pravidlo pravé ruky. Kdyby pravotočivá nebyla, definovaly by tyto vzorce vektorový součin určený levou rukou. Volba ruky je čistě konvence, fyzikální důsledky teorie by byly stejné, i kdybychom důsledně používali opačnou ruku (podobně jako bychom mohli všude zaměnit znaménka náboje a uvažovat, že elektron je kladně nabitý).



Obrázek 2 Pravidlo pravé ruky. Ukazováček ukazuje první vektor a prostředníček druhý. Palec pak ukazuje výsledný vektor. V případě magnetického pole je první vektor směr rychlosti, druhý vektor směr magnetického pole a výsledný vektor směr síly. (Častá je také formulace, že sevřené prsty ukazují směr ostrého úhlu orientovaného od prvního vektoru ke druhému. Pak opět zdvižený palec označuje výsledný vektor.)[3]

Obsah rovnoběžníku daného vektory $\vec{a}$, $\vec{b}$ je součin délky strany a délky příslušné výšky. Výšku dostaneme právě rozložením druhého vektoru do kolmého a rovnoběžného směru, přičemž výška bude ta kolmá složka. Vektorový součin tedy přesně odpovídá způsobu výpočtu magnetické síly. Snadno je to vidět na mezních případech – jsou-li vektory $\vec{a}$ a $\vec{b}$ na sebe kolmé, bude velikost vektoru $\vec{c}$ rovna součinu velikostí obou vektorů, jsou-li rovnoběžné, bude výsledný vektor nulový, což oboje odpovídá popisu magnetické síly.

Působení magnetického pole se tedy dá jednoduše napsat jako

$$\vec{F}_B = q\vec{v} \times \vec{B}.$$

Pro celkovou elektromagnetickou sílu, která je vektorovým součtem elektrické a magnetické, dosazaním dostaneme

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}).$$

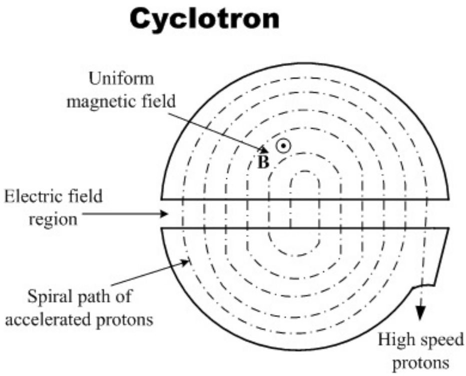
Úkol a *(1 b.): Správným nastavením intenzity homogenního elektrického pole $\vec{E}$ a magnetické indukce $\vec{B}$ se dá sestavit zařízení, které propustí nabité částice pouze určité rychlosti. Soustava vypadá tak, že směr rychlosti částice, intenzity elektrického pole a magnetické indukce jsou navzájem kolmé. Odvoďte velikost intenzity elektrického pole $\vec{E}$ pro indukci $\vec{B}$ tak, aby soustava propouštěla pouze*

[3] Zdroj: commons.wikimedia.org/wiki/File:Right_hand_rule_cross_product.svg

částice (s hmotností m_0 a nábojem q) o rychlosti $\vec{v}$ (propouštěním se v tomto případě míní, že částice se bude pohybovat přímočaře, zatímco částice jiné rychlosti změní směr).

Úkol b *(2 b.)*: *Soustava z předchozí úlohy se dá využít například při hmotnostní spektrografii. Nejdříve se vyseparují částice určité rychlosti a poté se měří poloměr dráhy částic v samostatném magnetickém poli*[4] *(dráhy se historicky daly pozorovat např. v mlžné komoře). Tento proces umožňuje zjistit poměr hmotnosti a náboje částice (další využití je např. separace izotopů, tato metoda se používala pro separaci uranu 235 a 238 za druhé světové války). Vypočítejte tedy závislost poměru hmotnosti a náboje m/q na velikosti rychlosti v, poloměru dráhy r a indukci magnetického pole $\vec{B}$.*

Cyklotrony jsou historicky první typy urychlovačů částic. Skládají se z magnetického pole, jehož indukce je kolmá na rovinu pohybu částice, a z elektrického pole, jehož intenzita je rovnoběžná s touto rovinou. Magnetické pole stáčí dráhu částice a elektrické pole částici urychluje. Po každém půlkruhu, který částice urazí, se změní směr intenzity elektrického pole.



Obrázek 3 Schéma cyklotronu.

Úkol c *(3 b.)*: *Určete, jak se v cyklotronu změní energie částice po každém průchodu elektrickým potenciálem U, a vypočtěte poloměr dráhy a rychlost částice v závislosti na její energii. Také zjistěte, jaká bude půlperioda pohybu částice v závislosti na energii a rychlosti (a tedy i jak často se musí přepínat elektrické pole). Počáteční rychlost částice byla v_0.*

Úkol d *(2 b.)*: *V předchozí úloze měla částice počáteční rychlost kolmou na magnetickou indukci a v důsledku toho se pohybovala po kružnici. Jak se bude částice pohybovat, když bude mít jiný směr počáteční rychlosti?*

[4] Obecně může jít o kombinaci magnetického a elektrického pole.

Úkol e *(1 b.)*: *V případě moderních detektorů částic nevidíme celé trajektorie, ale pouze body (když částice zasáhne detektor). Každý takovýto bod má tři prostorové a jednu časovou souřadnici. Promyslete, kolik takových bodů je potřeba k jednoznačné rekonstrukci dráhy, když se částice pohybuje v magnetickém poli. Magnetickou indukci $\vec{B}$ směřuje ve směru osy z.*

Úkol f *(3 b.)*: *Vymyslete, jak z těchto „zásahů“ určíte hmotnost a kinetickou energii částice, případně uveďte, v jakých případech (podle počáteční rychlosti, viz úkol d) nelze tyto vlastnosti určit. Uvažujte, že znáte náboj částice q.*

Filip

2.4 Kostky a pravděpodobnost

Pravděpodobnost nějakého náhodného jevu udává, jakou máme šanci, že daný jev nastane. Hod kostkou, losování nebo ruleta, to vše jsou náhodné jevy. Aby se nám o náhodě lépe mluvilo, zavedeme si některé pojmy. Ty lze použít k výpočtu zadaných příkladů níže.

Související definice

V našem případě budeme mluvit o náhodných jevech či náhodných pokusech. Nejdříve je potřeba zavést *množinu všech možných výsledků náhodného pokusu*, tu označíme Ω (omega). Pro hod kostkou by platilo $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. *Náhodný jev* pak definujeme jako libovolnou podmnožinu $A \subset \Omega$. Například jev „na kostce padne sudé číslo“ bychom napsali jako $A = \{2, 4, 6\}$. Pokud při hodu kostkou padne číslo 2 (tj. provedli jsme náhodný pokus s výsledkem 2), platí, že $2 \in A$, a tedy jev A *nastal*. V opačném případě bychom řekli, že jev A *nenastal*.

Existují dva speciální druhy jevů: jev jistý a nemožný. *Jistý* jev je, pokud nastane v každém pokusu. Matematicky zapsáno: $A = \Omega$. U kostek by to byl například jev $A =$„padne číslo menší než 7“. Opakem je právě jev *nemožný*. Ten matematicky značíme $A = \emptyset$. Při hodu kostkou je to například jev $A =$„na kostce padne -5“.

Pro úplnost ještě definujeme velikost množiny A, kterou označíme $|A|$. Tato velikost udává počet prvků v dané množině. Jestliže $A = \{2, 4, 6\}$, pak $|A| = 3$. Množina všech možných výsledků hodu kostkou Ω má velikost $|\Omega| = 6$.

Pravděpodobnost jevu

Pravděpodobnost jevu nám říká, jak moc můžeme očekávat, že daný jev nastane. Udáváme ji jako číslo z intervalu $\langle 0, 1\rangle$ nebo pomocí procent. Jako první si řekneme jisté předpoklady, které budeme potřebovat pro definici pravděpodobnosti. Nechť pro náhodný pokus platí:

- Všech možných výsledků je konečně mnoho (tj. Ω je konečná množina).

Katedra matematiky

Nejenom v úloze o pravděpodobnosti, ale asi ve všech úlohách, které v rámci Semináře vědy a techniky budete řešit, budete více či méně potřebovat matematiku. Výuku matematiky na Jaderce zajišťuje další z velkých kateder – katedra matematiky.

Mezi obory garantované katedrou matematiky patří jednak praktický bakalářský obor Aplikovaná informatika s velkým důrazem na výuku angličtiny, hlavními obory ale jsou Matematické modelování, Aplikované matematicko-stochastické metody a Matematická informatika. Blízko k ní má také jedno ze zaměření pod katedrou fyziky, Matematická fyzika.

Nabízené obory odrážejí vědeckou práci na katedře, kterou zajišťují čtyři výzkumné skupiny. Skupina matematického modelování MMG se věnuje modelování a simulacím jevů v high-tech designu, ochraně životního prostředí a počítačové vědě. Skupina aplikované matematiky a stochastiky GAMS se zabývá studiem fyzikálních, biologických a sociálních systémů pomocí metod statistiky, analýzy a pravděpodobnosti. Tigři z Theoretical Informatics GRoup se věnují tématům diskrétní matematiky s aplikacemi v informatice i fyzice. Matematické problémy inspirované zejména teoretickou fyzikou nemilosrdně likviduje MAFIA, což je zkratka pro Methods of Algebra and Functional analysis In Applications.

Podrobnější informace o jednotlivých skupinách se dozvíte v dalších blocích o této katedře.

- Nemohou padnout dva výsledky současně (tj. nemůžeme na kostce hodit trojku a zároveň šestku).
- Každý výsledek je stejně možný (tj. máme stejně velkou šanci, že hodíme na kostce čtyřku jako že hodíme šestku).

První dvě podmínky přirozeně představují rozumné zadání úlohy. Třetí často idealizuje skutečnost, což je mírně omezující podmínka, ovšem nezbytná pro korektní zavedení.

Nyní můžeme říci, že *pravděpodobnost jevu A*, kterou označíme $P(A)$, je rovna

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

Pravděpodobnost hodu sudého čísla na kostce by tak byla rovna:

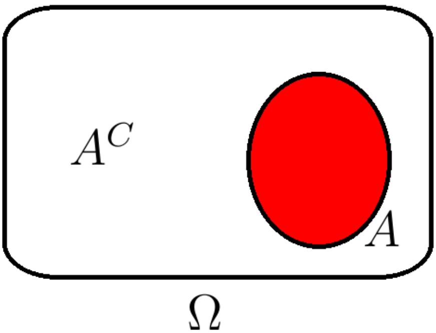
$$P(\text{sudé}) = \frac{|2,4,6|}{|1,2,3,4,5,6|} = \frac{3}{6} = 0{,}5 = 50\,\%\,.$$

Padesátiprocentní pravděpodobnost přirozeně říká, že máme stejně velkou šanci pro hod sudého i lichého čísla. Jak je to s pravděpodobnostmi pro jistý a nemožný jev?

$$P(\Omega) = \frac{|\Omega|}{|\Omega|} = 1\,,$$
$$P(\emptyset) = \frac{|\emptyset|}{|\Omega|} = \frac{0}{|\Omega|} = 0\,.$$

Doplňkový jev

Zde dodefinujeme další typ jevu, který se nazývá doplňkový (či komplementární). O doplňkovém jevu můžeme mluvit pouze v souvislosti s nějakým daným jevem (s jevem, který je doplňován). *Doplňkový jev jevu A* je takový, který nastane, právě když nenastane jev A. Takový jev označíme jako A^C (z angl. complementary). Množinově lze zapsat $A^C = \Omega \setminus A$ (odečet množin – to jsou všechny prvky, které jsou v množině Ω a nejsou v množině A, viz obrázek).



Obrázek 4 Doplněk A^C jevu A na množině Ω.

Doplněk A^C jevu A tak obsahuje všechny jevy, které nejsou v A, ale stále mohou nastat. Vysvětleme jej na příkladu. Předpokládejme stále hod kostkou a jev $A = \{2, 4, 6\}$, tedy jev „padne sudé číslo“. Pak doplněk jevu A je

$$A^C = \Omega \setminus A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \setminus \{2, 4, 6\} = \{1, 3, 5\}\,.$$

A skutečně, pokud nenastane jev A „padne sudé číslo“, pak jistě padne liché číslo, tedy $A^C = \{1, 3, 5\}$. Pro pravděpodobnost doplňkového jevu platí jednoduchý vztah

$$P(A^C) = 1 - P(A)\,.$$

Tak například, je-li pravděpodobnost nějakého jevu $A = 25\,\%$, jaká je pravděpodobnost jevu A^C? podstatě se ptáme – jaká je pravděpodobnost, že nenastane jev A? Jev A nastane s pravděpodobností 25 % a tak jev A nenastane s pravděpodobností 100 % – 25 % = 75 %.

Nezávislost jevů

Nezávislost jevů A a B znamená, že vyskytnutí jevu A nijak neovlivňuje výskyt jevu B a naopak. Jinými slovy, výsledky náhodných pokusů na sobě nezávisí. Zvolíme-li např. jev $A = \{1, 2\}$ a jev $B = \{1, 6\}$, pak se pravděpodobnosti jevů ovlivňují, jelikož v případě, kdy padne jednička, nastanou oba jevy A i B. Jsou-li jevy A a B *nezávislé*, pak pro ně platí rovnost

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Pro první případ $A = \{1, 2\}$ a $B = \{1, 6\}$ tak dostáváme $P(A \cap B) = P(\{1, 2\} \cap \{1, 6\}) = P(\{1\}) = 1/6$. Zatímco $P(A)P(B) = (1/3)(1/3) = 1/9$.

Úkol a *(2 b.)*: *Hrajeme se třemi kostkami. Jaká je pravděpodobnost, že se stejné číslo objeví alespoň na dvou ze tří kostek? Jaká je pravděpodobnost, že se stejné číslo objeví přesně na dvou ze tří kostek?*

Úkol b *(4 b.)*: *Hrajeme s dvěma kostkami. Označme jevy:*

- A = *na první kostce padne 4,*
- B_1 = *po druhém hodu bude součet roven 6,*
- B_2 = *po druhém hodu bude součet roven 7.*

Jsou jevy A a B_1 nezávislé? Jsou nezávislé jevy A a B_2? Výsledky porovnej a slovy vysvětli.

Úkol c *(6 b.)*: *Hraješ Macháčka[5]. V průběhu předchozích kol jsi zjistil, že hráč, který je po tobě, ti věřil pětkrát z deseti případů, a hráč, který je před tebou, ti šestkrát z deseti řekl pravdu. Dále předpokládej, že sám jsi velmi důvěřivý (tedy vždy uvěříš s pravděpodobností 1). Považuj všechny jevy za nezávislé. Využij těchto znalostí a předpokladů k výpočtu potřebných pravděpodobností. Zjisti:*

- *Pravděpodobnost, že přehodíš číslo 62.*
- *Pravděpodobnost, že se ztratíš bod (budeš se muset napít), když musíš přehodit číslo 62. (Samozřejmě předpokládej, že když přehodíš 62, jistě říkáš pravdu. Když ne, lžeš.)*
- *Pravděpodobnost, že budeš muset přehodit číslo 62. (Opět předpokládej, že pokud hráč před tebou hodí 62, tak jistě mluví pravdu. Pokud ne, lže.)*
- *Je tento model, kdy předpokládáme nezávislost, reálný?*

Ondra

[5] Pravidla najdeš na http://cs.wikipedia.org/wiki/Macháček